Inhaltsverzeichnis

Didaktisch-methodische Hinweise

Diesem Stationenlernen liegen verschiedene methodische Konzepte zugrunde.
Die Stationen 1-4 und 6-8 benutzen im Prinzip einen Grenzübergang für $n \to \infty$, also das Prinzip der vollständigen Induktion. Auch wenn diese in der Sekundarstufe I nicht durchführbar ist, so sollte man doch auf keinen Fall darauf verzichten, den Grenzübergang zumindest anzudeuten, zumal es in der Mathematik der Sekundarstufe I Grenzübergänge selten gibt, weil das Thema »Folgen und Reihen« aus dem Lehrplan herausgenommen wurde.
Am einfachsten ist der Grenzübergang bei den Parcours 1 und 2 durchzuführen.

Parcours 2:
Hier benutzt man am besten die Zeichnung mit dem Viertelkreis, die man günstiger Weise auf Folie zieht. Durch Halbierung des Rechtecks A_9 und der anschließenden Kreisabschnitthälfte erzeugt man weitere Rechtecke. Hier lässt sich durch die Schraffuren einsichtig machen, welche Flächenteile zur vorigen »Zackenfläche« hinzuaddiert werden, sodass sich diese Fläche besser an den Kreis von innen her anschmiegt.

Man sieht dann schnell ein, dass bei weiterer Unterteilung des Kreisradius in $\frac{r}{30}$, $\frac{r}{40}$, usw. die innere »Zackenfläche« – wenn die Unterteilung nur genügend fein ist – ganz allmählich in die Kreisfläche übergeht. Da n von den Schülern und Schülerinnen nicht als unendlich gedacht werden kann, bleibt für sie immer noch ein winziges Stückchen der »Zackenfläche« übrig, um die die »Zackenfläche« kleiner als die Kreisfläche ist. Die Kreisfläche wird also immer etwas größer bleiben. Der Denkvorgang bis hierher ist aber völlig ausreichend, um das Problem erkannt zu haben.

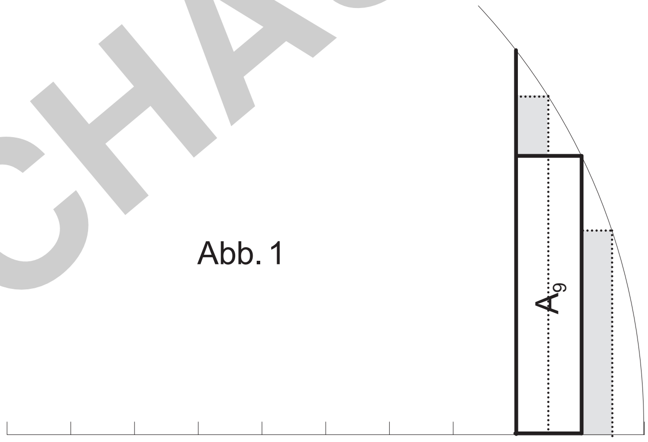


Abb. 1

Parcours 1:
Man kann natürlich statt des Parcours 2 auch Parcours 1 wählen. Der Denkvorgang ist der gleiche wie bei Parcours 2. Es ergibt sich hier aber eine weitere Möglichkeit, das Problem der Flächenannäherung einsichtig zu machen. Nimmt man nämlich weitere Unterteilungen der vorhandenen Rechtecke wie in Parcours 2 vor, so kann man die jetzt übriggebliebenen Teilrechtecke abschneiden, sodass nun auch durch das praktische Wegnehmen die äußere »Zackenfläche« immer kleiner wird.

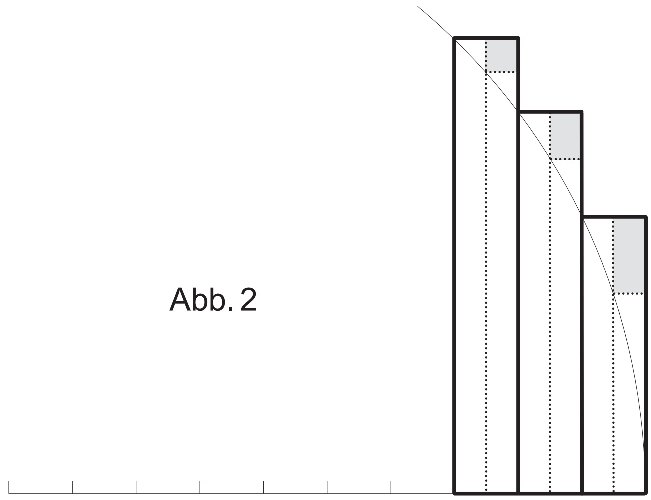


Abb. 2

Didaktisch-methodische Hinweise

Parcours 3:
Auch hier lässt sich eine Verfeinerung durchführen, indem man auf 12-, 24-, 48-Ecke übergeht. Das ist aber mathematisch gesehen sehr aufwändig und führt zu der Formel:

$$A_n = n \cdot a_n \cdot \frac{r}{2} \cdot \sqrt{1 - \frac{a_n^2}{4r^2}}$$

A_n *Flächeninhalt des regelmäßigen Vielecks*
$n \cdot a_n = u_n$ *Umfang des regelmäßigen Vielecks (s. Abb. 3)*

Es ist wichtig, dass man den Mittelwert der ein- und umbeschriebenen Dreiecke bildet, denn jede Methode für sich allein genommen ist für die Schüler und Schülerinnen nicht »genau« genug. Es würde im Unterricht ja auch reichen, *eine* Methode durchzuführen und die Formel für die andere vorzugeben, um dann den Mittelwert zu bilden. Der Mittelwert hat eine Genauigkeit von 96,5 %.
Man kann natürlich auch die Ungenauigkeit der Methode der einbeschriebenen Dreiecke, die größer ist als die der umbeschriebenen Dreiecke, dazu benutzen, die Notwendigkeit der Ermittlung der Fläche der umbeschriebenen Dreiecke deutlich zu machen, um dann den Mittelwert bestimmen zu können. Der Weg, so überzeugend er ist, kostet natürlich Zeit und ist im Anspruch höher.

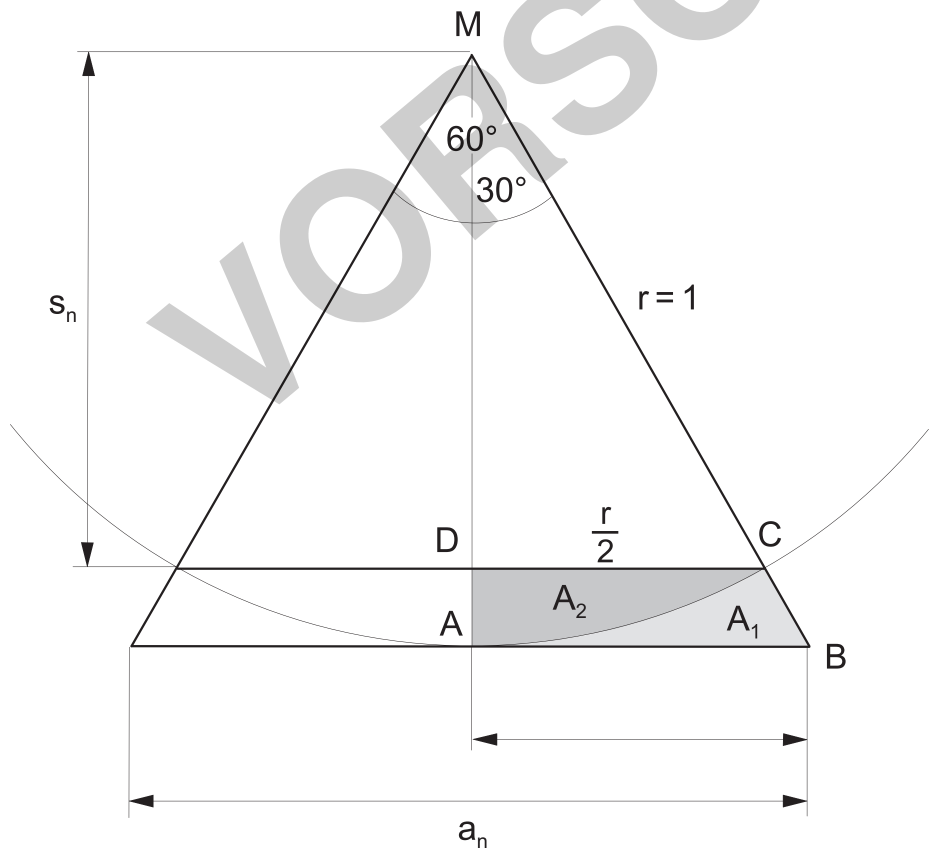
Berechnung von a_n: $\tan 30° = \frac{\frac{a_n}{2}}{r}$

$$\frac{a_n}{2} = 0,5773$$

Berechnung von s_n: $\cos 30° = \frac{s_n}{r}$

$$\frac{s_n}{1} = 0,8660$$

Abb. 3



$A_1 = A_{MAB} - A_{MAC}$

$$A_1 = \frac{r \cdot \frac{a_n}{2}}{2} - \frac{\pi \cdot r^2}{12}$$

und weil r = 1

$$A_1 = \frac{a_n}{4} - \frac{\pi}{12}$$

$A_1 = 0{,}2887 - 0{,}2618$

$\underline{\underline{\mathbf{A_1 = 0{,}0269}}}$

$A_2 = A_{MAC} - A_{MDC}$

$$A_2 = \frac{\pi}{12} - \frac{s_n \cdot \frac{r}{2}}{2}$$

und weil r = 1

$$A_2 = \frac{\pi}{12} - \frac{s_n}{4}$$

$A_2 = 0{,}2618 - 0{,}2165$

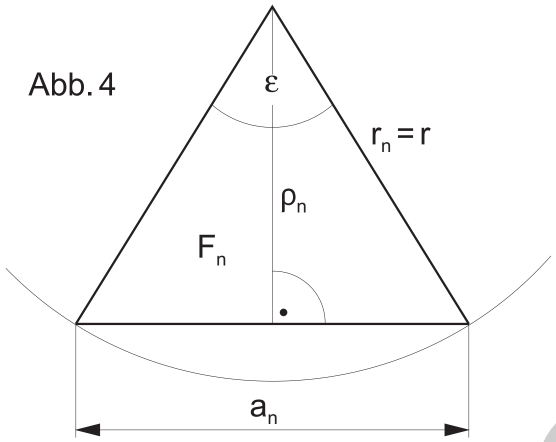
$\mathbf{A_2 = 0{,}0453}$

Didaktisch-methodische Hinweise

Einfacher ist die Methode der ein- bzw. umbeschriebenen Dreiecke, wenn man trigonometrische Funktionen zur Verfügung hat. Die sind in Klasse 9 aber nicht Thema des Mathematikunterrichts. Da der Zugang unter diesen Voraussetzungen aber nicht schwer ist, bietet es sich in Klasse 10 an, die Kreisflächenformel als Anwendungsaufgabe der Trigonometrie herzuleiten. Man kann dann mit dem Taschenrechner schnell ausrechnen, wie die Genauigkeit der Zahl π zunimmt. Für z. B. n = 1000 ist das schon beeindruckend.

Einbeschriebenes regelmäßiges n-Eck mit dem Flächeninhalt F_i

Abb. 4



$$\varepsilon = \frac{360°}{n} \; ; \; r_n = r$$

$$F_i = n \cdot F_n$$

$$F_i = n \cdot \frac{\rho_n \cdot a_n}{2}$$

$$\rho_n = r \cdot \cos\frac{\varepsilon}{2}$$

$$a_n = 2 \cdot r \cdot \sin\frac{\varepsilon}{2}$$

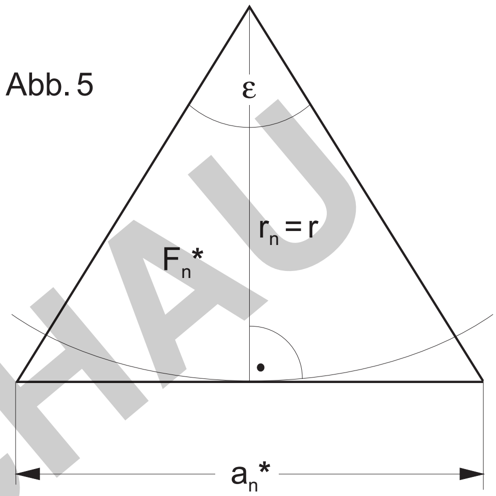
$$F_i = n \cdot r^2 \cdot \cos\frac{\varepsilon}{2} \cdot \sin\frac{\varepsilon}{2}$$

$$F_i = r^2 \cdot \underbrace{n \cdot \cos\frac{180°}{n} \cdot \sin\frac{180°}{n}}$$

für $n \to \infty$ geht $n \cdot \cos\frac{180°}{n} \cdot \sin\frac{180°}{n}$ gegen π.

Umbeschriebenes regelmäßiges n-Eck mit dem Flächeninhalt F_a

Abb. 5



$$\varepsilon = \frac{360°}{n}$$

$$F_a = n \cdot F_n^*$$

$$F_a = n \cdot \frac{r_n \cdot a_n^*}{2}$$

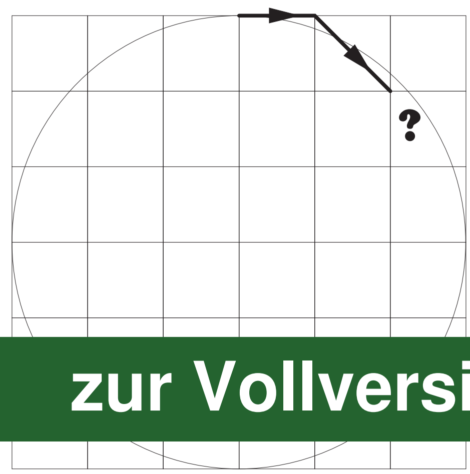
$$a_n^* = 2 \cdot r_n \cdot \tan\frac{\varepsilon}{2}$$

$$a_n = 2 \cdot r_n \cdot \tan\frac{180°}{n}$$

$$F_a = r_n^2 \cdot \underbrace{n \cdot \tan\frac{180°}{n}}$$

für $n \to \infty$ geht $n \cdot \tan\frac{180°}{n}$ gegen π.

Parcours 5:
Diese Methode lässt sich nicht verfeinern, denn wenn man aus 9 Teilquadraten durch weitere Halbierung dann 36 Teilquadrate herstellt, so sieht man sehr schnell, dass man kein Polygon herstellen kann, wie es bei den 9 Teilquadraten der Fall ist. Natürlich kann man einen Polygonzug einzeichnen, doch ist der viel schlechter als der bei den 9 Teilquadraten. ...mmt ... die Methode zu einem Wert von ...9 ...es von π.



Didaktisch-methodische Hinweise

Der erste Aspekt ist nicht so ganz einfach zu entscheiden. Angenommen, man markiert immer 100 Gitterquadrate unabhängig von der Feinheit des Gitters. Dann ist unmittelbar klar, dass immer weniger markierte Gitterquadrate auf dem Kreisrand liegen werden. Die Entscheidungshäufigkeit »liegt innerhalb bzw. außerhalb der Kreisfläche« nimmt ab, wenn das Gitterquadrat auf dem Kreisrand liegt, und das wechselseitige Zuordnen zu »innerhalb bzw. außerhalb der Kreisfläche«, wenn das Gitterquadrat »genau« auf dem Kreisrand liegt, nimmt ebenfalls ab. Das Ergebnis für π müsste eigentlich besser werden. Bei genügend großer Verfeinerung des Gitters dürfte irgendwann einmal kein Gitterpunkt mehr auf dem Kreisrand liegen. Das muss aber nicht sein, denn die ständige Verfeinerung des Gitters bringt eine ständige Verlängerung der Koordinaten des betreffenden Gitterquadrates mit sich, und das ist nichts anderes als eine Intervallschachtelung des Gitterquadrates, und jede kann durchaus einen Punkt auf dem Kreis definieren. Das ist zwar ein Grenzübergang, aber der bringt bei endlicher Anzahl von Gitterquadraten (Punkten) keine prinzipielle Verbesserung des angestrebten Wertes von π . Diese ist nur erreichbar, wenn man mit der Verfeinerung des Gitters auch die Anzahl der markierten Gitterquadrate erhöht.

Parcours 12, Parcours 13

Auch diese Parcours benutzen den Gedanken eines Grenzübergangs. Die eigentlichen Schwierigkeiten beginnen nach Gleichung VI, wenn h_n bestimmt werden soll. Man kann das Problem umgehen, wenn man den Schülerinnen und Schülern klar machen kann, dass beim Übergang für $n \rightarrow \infty$ $h_n \rightarrow r$ geht. Das führt von

Gleichung VII $A_n = n \cdot s_n \cdot \frac{h_n}{2}$ zur Gleichung $A_{Kreis} = u_{Kreis} \cdot \frac{r}{2}$.

In der vorletzten Gleichung steckt noch ein gedankliches Problem: Wenn $s_n \rightarrow 0$ geht, was macht dann der Term $n \cdot s_n$, da n doch gegen ∞ strebt? Natürlich strebt dieser Ausdruck gegen u_{Kreis}, aber ein unwohles Gefühl bleibt, denn u_{Kreis} ist eine ganz bestimmte Zahl.

So ist es vielleicht sicherer, von der

Gleichung $A_n = u_n \cdot \frac{h_n}{2}$ aus zu argumentieren.

Für $h \rightarrow r$ führt alles zur gewünschten

Gleichung $A_{Kreis} = u_{Kreis} \cdot \frac{r}{2}$ und

$A = r^2 \cdot \pi$

Wegen der oben genannten Schwierigkeiten gibt es zwei Versionen des Verfahrens, wobei Parcours 13 das »leichtere« Verfahren anbietet.

Weitere Verfahren zur Kreisberechnung und zur Zahl π findet man in

Mathematik Gestern und heute: Historische Verfahren zeitgemäß aufbereitet

Kohl-Verlag (ISBN 978-3-96040-022-6):

Wie Archimedes π bestimmte, Wie der Bischof von Brixen π bestimmte,

Wie C. F. Gauß π bestimmte, Wie man zufällig auf π kommt,

Wie der Prediger John Wallis π bestimmte, Die Kreiszahl π im Laufe von Jahrhunderten, Zur Quadratur des Kreises.

Die Berechnung der Kreisfläche
Laufzettel
Name: ____________________

Stations-nummer	erfolgreich bearbeitet?	Deine Meinung und Bemerkungen zu dieser Station
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		
12		
13		

Parcours 1

Berechnung der Kreisfläche über »umbeschriebene« Rechtecke

Suche dir einen Partner oder eine Partnerin!

I. Beschreibung:

An dieser Station lernt ihr eine Näherungsmethode kennen, bei der man »umbeschriebene« Rechtecke benutzt, um die Flächenformel für den Kreis zu erarbeiten. Um es etwas einfacher zu machen, arbeitet ihr zuerst nur an einem Viertelkreis (siehe Zeichnung).

Vorbemerkung: Wenn du schon Parcours 2 erfolgreich bearbeitet hast, wird Parcours 1 ein geistiger Spaziergang sein. Dazu solltest du die Zeichnungen von Parcours 1 und 2 genau ansehen, am besten nebeneinander.
Dir wird einiges auffallen!

II. Materialliste:

entfällt

III. Arbeitsanweisungen:

1. Du musst zuerst die Flächen der Rechtecke A_1, A_2, ... , A_{10} berechnen.

Formel für den Flächeninhalt des Rechtecks

$$A_{Rechteck} = \quad \cdot$$

2. Dazu brauchst du die beiden Seiten

$$a = \frac{r}{10}$$

$$b = y_1, y_2, y_3, \ldots, y_9$$

Die Länge von y_0 ist klar. y_0 = *(kann man ablesen)*

3. Als Beispiel werde ich dir einen Wert y mit n = 3 vorrechnen, damit es nicht so schwer ist. y_3 brauchst du zur Berechnung von A_4.
Die anderen y-Werte kannst du dann selber berechnen.
Eine Hilfe ist schon eingezeichnet, der Radius r.
Zur Berechnung von y_3 (und für die anderen y auch) brauchst du den Satz des .... (1. Hilfe?).

4. Suche in der Zeichnung die drei charakteristischen Seiten für dieses Dreieck (2. Hilfe?) und setze sie in die Gleichung für den Satz des .... ein.

Stationenlernen: Rund um den Kreis - Bestell-Nr. P12 010
KOHL VERLAG

Parcours 1

Berechnung der Kreisfläche über »umbeschriebene« Rechtecke

III. Arbeitsanweisungen (Fortsetzung):

5. Du musst jetzt die Gleichung nach y_3 auflösen (3. Hilfe?).
6. Du hast jetzt y_3 = $\quad \cdot$ ——
7. Du kannst jetzt die Längen der beiden Seiten in die Formel für den Flächeninhalt des Rechtecks einsetzen und ausrechnen (4. Hilfe?). Für die Berechnung von A_4 brauchst du y_3!

$$A_4 = \qquad \cdot$$

8. So wie du A_4 berechnet hast, kannst du nach demselben Muster die Fläche der anderen Rechtecke berechnen. Es ist nur eine Wiederholung mit anderen Zahlen. Schreibe das systematisch auf, es wird dir helfen (5. Hilfe?)!
9. Addiere nun die Flächen $A_1, \ldots, A_{10}$ und klammere konsequent aus (6. Hilfe?).

$$A_{gesamt} = A_1 + A_2 + \ldots + A_{10}$$

$$A_{gesamt} =$$

$$A_{gesamt} =$$

$$A_{gesamt} \cdot 4 = A_{Kreisfläche} =$$

10. Wenn du jetzt alles geschafft hast, bist du Spitze!
Du hast allerdings auch ein kleines Problem, das du sicher schon bemerkt hast. Dein Zahlenwert in der Kreisflächenformel ist zu groß, denn alle deine Rechtecke $A_1, A_2, \ldots, A_{10}$ ragen über die Kreisfläche hinaus! Um das auszugleichen, gibt es die Methode der »einbeschriebenen« Rechtecke. Kannst du dir vorstellen, wie das funktioniert? Wenn nicht, dann versuche dich an Parcours 2.
Das ist nun wirklich ganz leicht.
Du musst nur zuerst die Zeichnung von Parcours 1 und Parcours 2 genau vergleichen. Dir wird ein Licht aufgehen und es ist nur ganz wenig zu rechnen. Du schaffst das schon!

Parcours 2

4. Hilfe

Die Berechnung des Rechtecks A_3 als Beispiel für die anderen Rechteckflächen:

$$A_3 = a \cdot b$$

$$A_3 = a \cdot y_3$$

$$A_3 = \frac{r}{10} \cdot \frac{r}{10} \cdot 9{,}54$$

$$A_3 = \frac{r^2}{100} \cdot 9{,}54$$

Parcours 2

5. Hilfe

$$A_1 = a \cdot b = \frac{r}{10} \cdot y_1 = \frac{r}{10} \cdot \frac{r}{10} \cdot 9{,}95 = \frac{r^2}{100} \cdot 9{,}95$$

$$A_2 = a \cdot b = \frac{r}{10} \cdot y_2 = \frac{r}{10} \cdot \frac{r}{10} \cdot 9{,}80 = \frac{r^2}{100} \cdot 9{,}80$$

A_3 (s. 4. Hilfe)

$$A_4 = a \cdot b = \frac{r}{10} \cdot y_4 = \frac{r}{10} \cdot \frac{r}{10} \cdot 9{,}17 = \frac{r^2}{100} \cdot 9{,}17$$

$$A_5 = a \cdot b = \frac{r}{10} \cdot y_5 = \frac{r}{10} \cdot \frac{r}{10} \cdot 8{,}66 = \frac{r^2}{100} \cdot 8{,}66$$

$$A_6 = a \cdot b = \frac{r}{10} \cdot y_6 = \frac{r}{10} \cdot \frac{r}{10} \cdot 8{,}00 = \frac{r^2}{100} \cdot 8{,}00$$

$$A_7 = a \cdot b = \frac{r}{10} \cdot y_7 = \frac{r}{10} \cdot \frac{r}{10} \cdot 7{,}14 = \frac{r^2}{100} \cdot 7{,}14$$

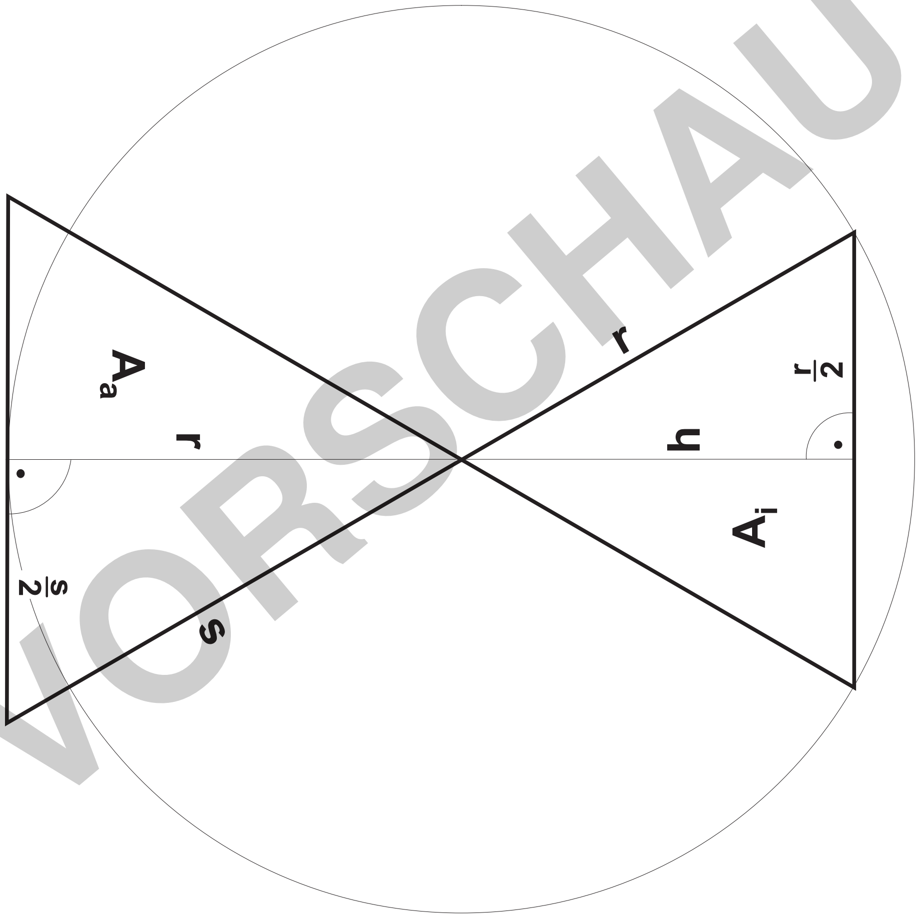
$$A_8 = a \cdot b = \frac{r}{10} \cdot y_8 = \frac{r}{10} \cdot \frac{r}{10} \cdot 6{,}00 = \frac{r^2}{100} \cdot 6{,}00$$

$$A_9 = a \cdot b = \frac{r}{10} \cdot y_9 = \frac{r}{10} \cdot \frac{r}{10} \cdot 4{,}36 = \frac{r^2}{100} \cdot 4{,}36$$

Parcours 3

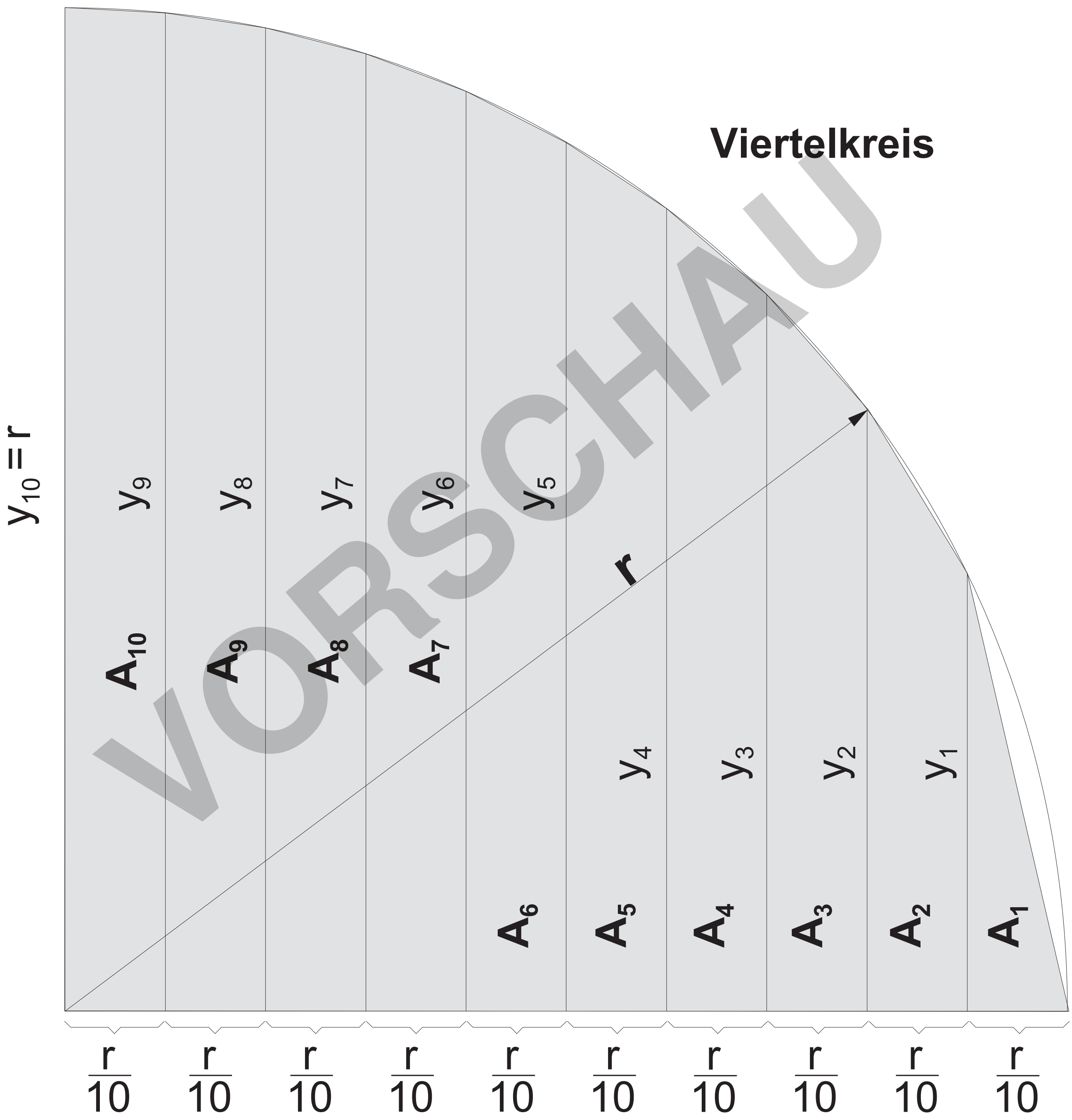
Die Berechnung der Kreisfläche über einbeschriebene und umbeschriebene Sechsecke

Abb. 2



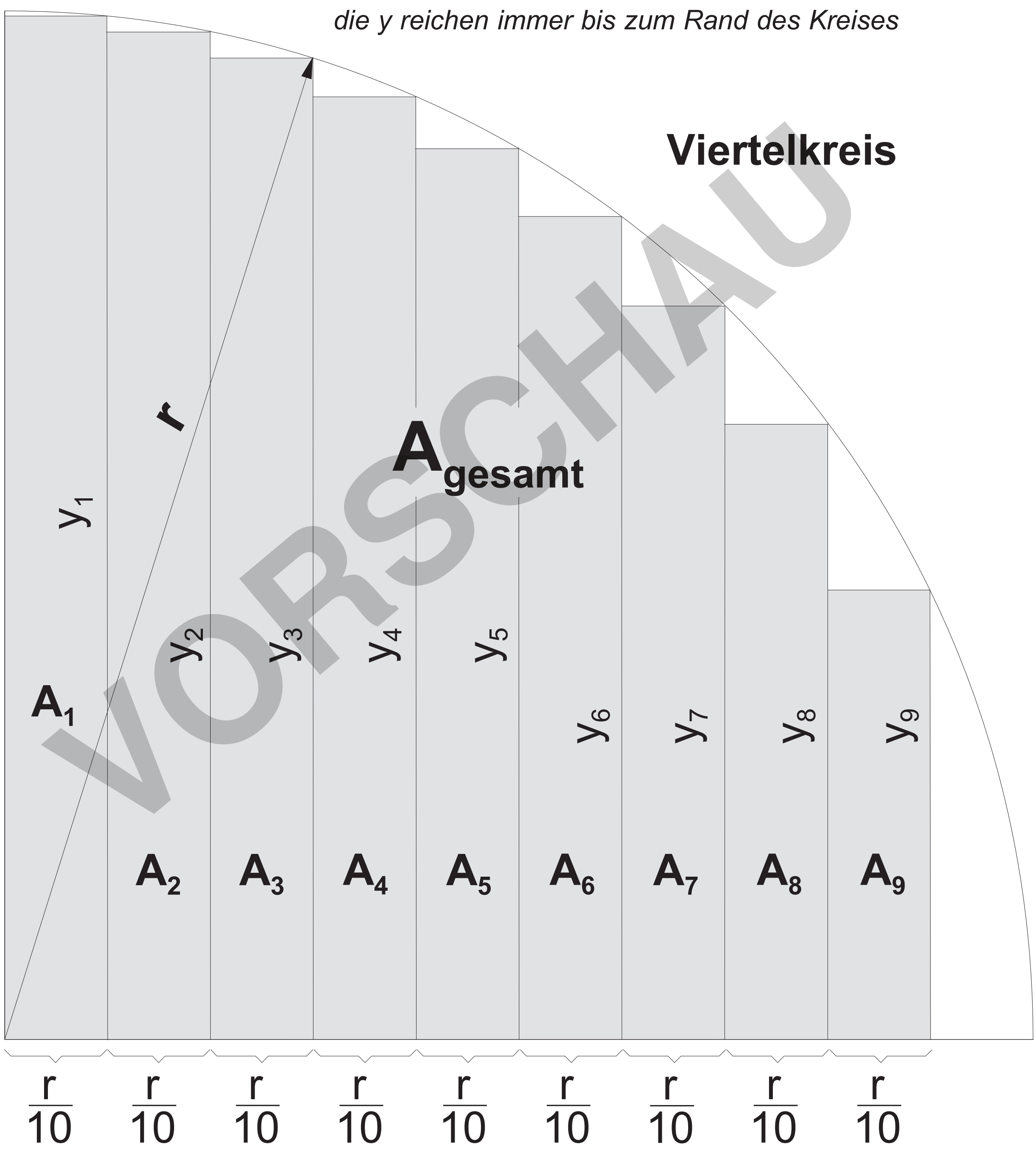
Parcours 4

Berechnung der Kreisfläche über Trapeze



Parcours 2

Berechnung der Kreisfläche über »einbeschriebene« Rechtecke



Für die Berechnung von A_3 brauchst du y_3

Parcours 4

Berechnung der Kreisfläche über Trapeze

Suche dir einen Partner oder eine Partnerin!

I. Beschreibung:

An dieser Station benutzt du die Formel für die Fläche eines Trapezes, um die Formel für die Fläche eines Kreises aufzustellen. Die Trapeze und das einzelne Dreieck sind aber zusammen etwas kleiner als die Fläche des Viertelkreises. Das musst du berücksichtigen. Der Zahlenwert, den du errechnest, ist deshalb etwas zu klein. Siehe Zeichnung!

II. Materialliste:

entfällt

III. Arbeitsanweisungen:

1. Um die einzelnen Trapezflächen zu berechnen, brauchst du die Seiten y_1 bis y_9. Das geht mit dem guten, alten P... . Suche dir entsprechende rechtwinklige Dreiecke. Das hast du sofort raus (1. Hilfe?).

2. Wenn du die Gleichung aufgestellt hast, musst du jeweils nach y auflösen (2. Hilfe?).

3. Berechne jetzt nacheinander die Flächen A_1 (Dreieck) und A_2, ... , A_{10}. Das dauert jetzt lange, aber es ist immer »the same procedure« (3. Hilfe?).

4. Wenn du alle Flächen addierst, kannst du teilweise die Wurzel ziehen und dann $\frac{r^2}{100}$ ausklammern. In der Klammer bleiben nur Wurzeln zurück, die du dann ausrechnen und addieren kannst (4. Hilfe?).

5. Wenn du alles richtig gemacht hast und auch noch mit 4 multipliziert hast, dann erhältst du die

Formel für den Flächeninhalt des Kreises

$A_{Kreis} = \quad \cdot r^2$

KOHL VERLAG Stationenlernen: Rund um den Kreis - Bestell-Nr. P12 010