Den Satz des Pythagoras in der Architektur entdecken

Nico Lorenz, Waltrop

Tippkarten auf CD-ROM 62

© rohavideo / pixelio.de

Statue von Pythagoras in Samos

Klasse: 9/10

Dauer: 4–6 Stunden

Inhalt: Verschiedenste Anwendungen des **Satzes von Pythagoras** an Bauwerken und im Heimwerkerbereich – modelliert durch quadratische, gerade Pyramiden und regelmäßige Tetraeder und Quader

Ihr Plus:

- ✓ Förderung der Allgemeinbildung: Behandlung bekannter Sehenswürdigkeiten
- ✓ Entwicklung des räumlichen Vorstellungsvermögens
- ✓ Bastelvorlagen (**M 6**)
- ✓ Lernerfolgskontrolle

Schülern fehlt im Mathematikunterricht oft der Zusammenhang zwischen dem zu lernenden Stoff und seinen Anwendungen im alltäglichen Leben oder in der Berufswelt. Durch vielseitige Beispiele und einen hohen Anwendungsbezug (Beispiel Architektur) zielt dieser Beitrag darauf ab, diesen Zusammenhang herzustellen.

I/D

Didaktisch-methodische Hinweise

Generelle Vorbereitung

Lassen Sie die Schüler

- **Pappe**, **Schere** und einen **Klebstift**

mitbringen. Teilen Sie sie in Gruppen von mindestens drei Schülern ein und lassen Sie in den Gruppen jeweils mindestens ein Exemplar der drei Körper zu den **Bastelvorlagen (M 6, Pyramide, Pyramidenstumpf und Tetraeder)** anfertigen. Gegebenenfalls können Sie das Anfertigen der Körper auch vorher als **Hausaufgabe** aufgeben. Bereiten Sie weiterhin einen Satz **Tippkarten (M 7 und auch auf CD-ROM 62)** vor, indem Sie diese laminieren und auf dem Pult auslegen. Das Material **M 5** kopieren Sie auf Folie.

Inhaltliche Vorbereitungen für die Bearbeitung der Aufgaben:

1. Dreiecke im Raum

Lassen Sie die Schüler, bevor Sie mit der Bearbeitung der eigentlichen Aufgaben beginnen, **rechtwinklige Dreiecke** in der quadratischen, geraden Pyramide suchen (weiterhin in den zuvor eingeteilten Kleingruppen). Nach kurzer Bearbeitungszeit werden die Ergebnisse zusammengetragen. Benutzen Sie zur Veranschaulichung zusätzlich die **Folienvorlage (M 5)**, um bereits auf die erste Aufgabe von Material **M 1** hinzuführen. Verdecken Sie dabei das Bild des Tetraeders, um mathematische Erkenntnisse nicht vorwegzunehmen und die Aufmerksamkeit der Schüler auf die aktuelle Situation zu fokussieren. Falls Sie das Gefühl haben, dass sich einige Schüler mit der **räumlichen Anschauung** schwer tun und genügend Zeit haben, wiederholen Sie diesen Schritt, d. h. das Suchen der rechtwinkligen Dreiecke, auch für das regelmäßige Tetraeder und den quadratischen, geraden Pyramidenstumpf.

2. Gleichschenklige Dreiecke

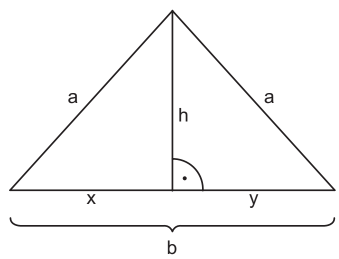
Viele Aufgaben beziehen sich auf gleichschenklige Dreiecke. Machen Sie die Schüler eingangs darauf aufmerksam, dass in diesem Fall **Mittelsenkrechte** und **Höhe** übereinstimmen. Wiederholen Sie ggf. diese Begriffe. In leistungsstärkeren Gruppen kann der Beweis dieser Tatsache mithilfe des Satzes von Pythagoras interaktiv durchgeführt werden: Man teilt das Dreieck durch die Höhe in zwei Teildreiecke auf, wendet den Satz von Pythagoras auf die beiden Teildreiecke an und erhält durch Umstellen die Erkenntnis, dass die Höhe die entsprechende Seite genau in der Mitte teilt, da die beiden Teilstrecken gleichlang sind.

$a^2 = h^2 + x^2$ und $a^2 = h^2 + y^2$

Gleichsetzen $\Rightarrow \quad h^2 + x^2 = h^2 + y^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 = y^2$

Alles $> 0 \;\Rightarrow x = y$

Wegen $x + y = b \Rightarrow x = y = \dfrac{b}{2}$



Ablauf

Die Bearbeitung der Aufgaben erfolgt je nach verfügbarer Zeit in Gruppen- oder Einzelarbeit. Manche Aufgaben können zusätzlich als **Hausaufgabe** verwendet werden. Bei anderen bietet sich eine Aufteilung der Schüler entsprechend den verschiedenen Lösungswegen an. Dies ist insbesondere bei **M 3**, **Aufgabe 1** und **M 4**, **Aufgabe 5** der Fall.

Eine solche Aufteilung liefert zusätzlich die Möglichkeit, verschiedene Lösungswege miteinander zu vergleichen und deren Vor- und Nachteile abzuwägen. Grundsätzlich lohnt sich Gruppenarbeit, um die Interaktion der Schüler und die Selbstständigkeit zu fördern. Weiterhin haben Sie so (und auch durch die Tippkarten) die Möglichkeit, unterschiedlich starke Schüler adäquat zu fördern, wodurch eine **Bin**

Auf einen Blick

Material	Thema
M 1	**Sehenswürdigkeiten aus aller Welt** Architektonische Untersuchungen von Sehenswürdigkeiten aus aller Welt; Anwendung des Satzes von Pythagoras an der quadratischen, geraden Pyramide und dem Quader
M 2	**Aus der Umgebung** Architektonische Untersuchungen von Sehenswürdigkeiten aus NRW; Anwendung des Satzes von Pythagoras an dem quadratischen, geraden Pyramidenstumpf und dem regelmäßigen Tetraeder
M 3	**Rund ums Haus** Beispielhafte Anwendung des Satzes von Pythagoras an gewöhnlichen Häusern; Modellierung durch das gleichschenklige Trapez
M 4	**Heimwerker aufgepasst!** Anwendung des Satzes des Pythagoras auf Probleme im Heimwerkerbereich; Modellierung durch Rechteck, Dreieck und Quader
M 5 **(Fo)**	**Glaspyramide und Tetraeder – zwei imposante Bauwerke** Schwarz-Weiß-Folienvorlage zu Aufgaben aus Material **M 1** und **M 2**
M 6	**Bastelvorlagen** Vorlagen zum Basteln von Pyramide, Pyramidenstumpf und Tetraeder zur Unterstützung von Schülern mit weniger ausgeprägtem räumlichem Vorstellungsvermögen
M 7	**Tippkarten (weitere Tippkarten auf CD-ROM 62)** Tippkarten zu ausgewählten Aufgaben
M 8 **(LEK)**	**Bist du fit? – Teste dein Wissen!** Lernerfolgskontrolle (Mischung aus Aufgaben des obigen Typs)

Minimalplan / Auswahl des Stoffs

Die Materialen und sogar die Aufgaben innerhalb eines Materials sind **unabhängig voneinander**, sodass Sie eine beliebige Auswahl treffen können. Jede Auswahl von zwei Materialen aus **M 1–M 4** bietet eine vielseitige Behandlung des Themas in einem Umfang von ca. zwei Unterrichtsstunden.

Die Materialen **M 1** und **M 2** sind dabei etwas schwieriger, da sich die Aufgaben hier vermehrt auf **dreidimensionale Strukturen** beziehen. Bei einer gewünschten Teilauswahl des Stoffs sollte dies berücksichtigt werden, um einerseits eine große Vielseitigkeit in den Aufgaben gewährleisten und andererseits den Schwierigkeitsgrad an die Klasse anpassen zu können.

Der Beitrag wird durch eine **Lernerfolgskontrolle (M 8)** abgerundet, die als Hausaufgabe bearbeitet werden kann.

M 1 Sehenswürdigkeiten aus aller Welt

Die alten Griechen haben sich bereits intensiv mit Geometrie beschäftigt, was sich u. a. in der antiken Architektur zeigt. Daher ist es spannend, alte Bauwerke geometrisch zu untersuchen. Doch auch die heutige Architektur hat interessante Konstruktionen vorzuweisen.

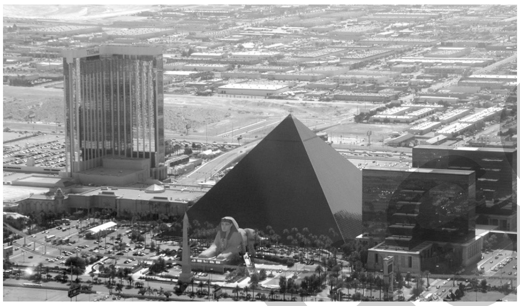
Aufgabe 1

Das weltbekannte Ölgemälde der Mona Lisa, welches Schätzungen zufolge ca. 1503–1517 von Leonardo da Vinci (1452–1519) angefertigt wurde, hängt seit 1804 im **Louvre**, einem Museum in Paris. Seit 1989 dient eine 35,42 m breite und 21,65 m hohe quadratische, gerade Glaspyramide als Museumseingang.

Wie groß ist die verbaute Glasfläche?

Glaspyramide vor dem Louvre

Aufgabe 2



Das Luxorhotel in Las Vegas

In Las Vegas, Nevada, steht das **Hotel Luxor**, das die Form einer quadratischen, geraden Pyramide hat. Es ist ca. 107 m hoch und eine Seitenkante der Pyramide ist ca. 175 m lang.

a) Berechne die Breite des Hotels.

b) Berechne die Größe der einzelnen Dreiecksflächen des Hotels.

Aufgabe 3

Die alten Griechen hatten ein sehr strenges Verständnis davon, wie die Proportionen in ihren Gebäuden sein sollten. Als Beispiel betrachten wir den Tempel des **Hephaistos in Athen**, einem der wenigen heutzutage noch gut erhaltenen Tempeln der Antike. Seine Grundfläche hat eine Diagonale von 35,57 m, während Breite und Länge in einem Verhältnis von 4:9 stehen. Die Höhe bis einschließlich des sog. *Geisons*, dem letzten Teil unterhalb des Dachgiebels, steht zur Breite des Tempels ebenfalls im Verhältnis von 4:9.

Der Tempel des Hephaistos

a) Berechne die Länge und Breite des Tempels.

b) Berechne auch die Höhe des Tempels bis einschließlich des Geisons.

c) Wie lang ist die Diagonale der Vorderseite des Tempels?

d) In welchem Verhältnis stehen die Diagonalen zueinander? Was fällt auf? Kannst du dies begründen?

e) An den längeren Seiten des Tempels stützen jeweils 13 gleich große Säulen mit einem unteren Durchmesser von 1,02 m das Dach. Wie weit stehen die Säulen auseinander?

Tipp Du kannst dabei vernachlässigen, dass die äußersten Säulen nicht ganz in den Ecken der Grundfläche stehen.

M 4 Heimwerker aufgepasst!

Will man Renovierungen am Haus vornehmen, Möbel umstellen oder auch nur die Inneneinrichtung ein wenig neu ausrichten, so erweist sich der Satz des Pythagoras in der vorherigen Planung oft als durchaus nützlich. Einige typische Alltagssituationen lernt ihr im Folgenden kennen.

© Thinkstock / iStock

Beim Umzug muss man an Vieles denken!

Aufgabe 1

Kann man einen 2,10 m hohen und 60 cm tiefen Schrank in einem 2,20 m hohen Raum aufstellen?

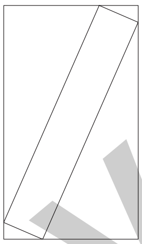
Aufgabe 2

Familie Tehfau möchte sich einen neuen Fernseher zulegen. Dieser soll zwischen zwei Schränken im Wohnzimmer positioniert werden, welche einen Abstand von 1,15 m zueinander haben.

Passt ein Fernseher mit einer Bildschirmdiagonale von 50″ in diese Lücke, wenn an jedem Rand noch 2 cm für das Gehäuse dazugerechnet werden müssen?

Tipp Heutzutage haben Fernseher ein Bildformat von 16:9, d. h. das Verhältnis von Breite zu Höhe des Fernsehers beträgt 16:9. Weiterhin entspricht ein Zoll 2,54 cm.

Aufgabe 3



Eine übliche Tür ist 75 cm breit und 1,95 m hoch.

Kann man durch diese einen 35 cm tiefen und 210 cm hohen Schrank schieben, indem man ihn etwas nach hinten (aber nicht zur Seite) kippt?

Aufgabe 4

Der etwas ungeschickte Heimwerker Donald hat einen Schrank zusammengebaut. Um zu überprüfen, ob er den Schrank tatsächlich rechtwinklig aufgebaut hat, misst er nach: Bei einer Breite von 76 cm und einer Höhe von 1,70 m beträgt die Diagonale 1,82 m.

Hat er den Schrank ordentlich zusammengebaut?

Aufgabe 5

Familie Plott will in ihrem Garten ein Blumenbeet in Form eines gleichmäßigen Achtecks einlassen. Eine Kantenlänge des Achtecks soll dabei eine Länge von 1,25 m und das Beet muss eine Tiefe von 15 cm haben. Eine 40-Liter-Packung Blumenerde kostet 10 €.

Wie viel muss Familie Plott für die Erde bezahlen?

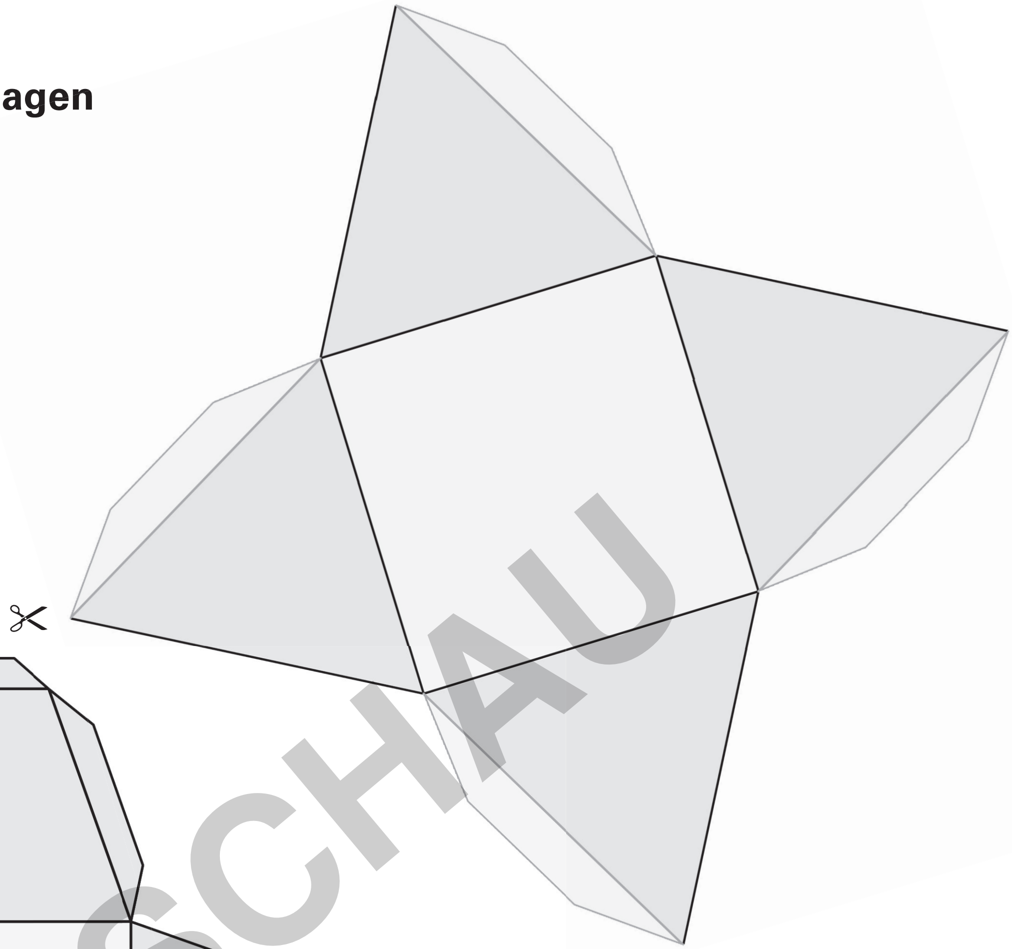
Grafik: Chr. Grundmann

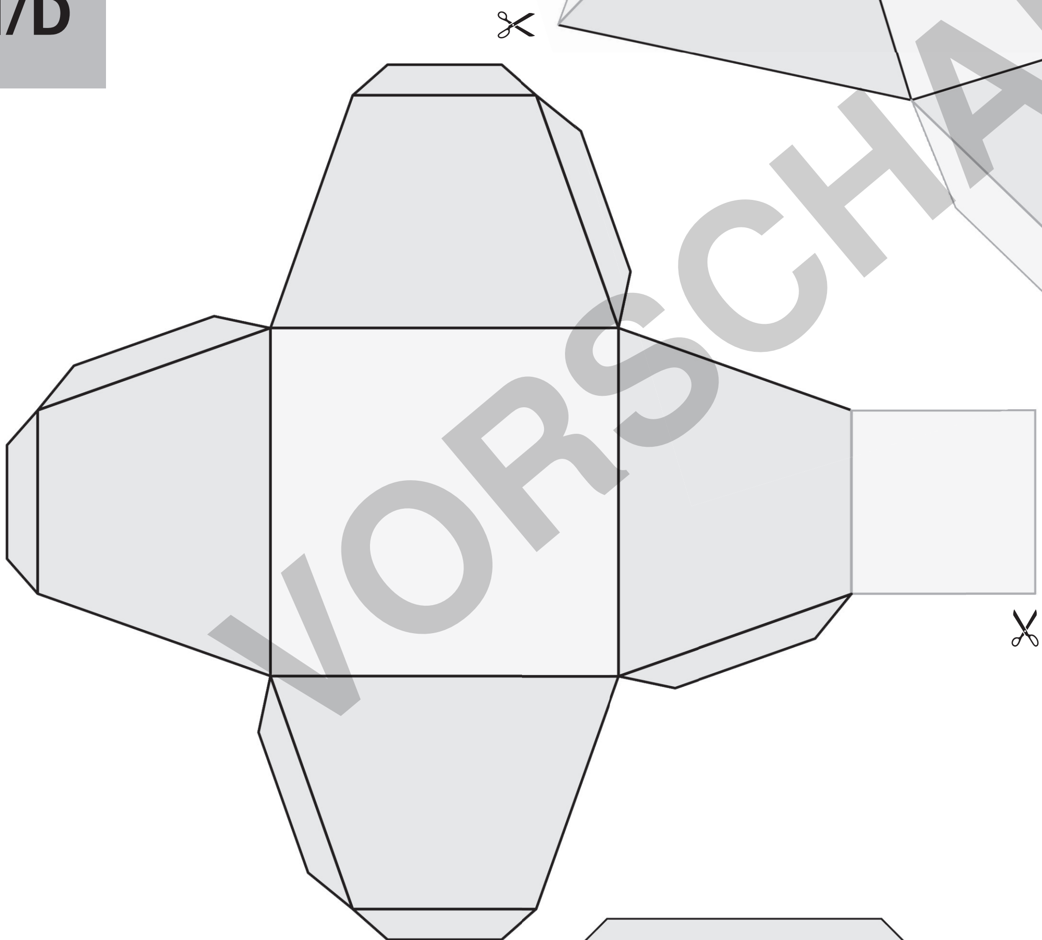
Der Heimwerker Donald

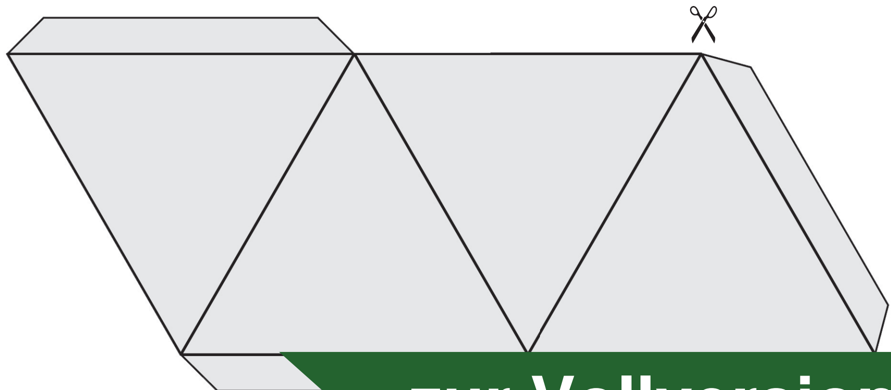
I/D

M 6 Bastelvorlagen

auch auf CD-ROM 62







M 8 Bist du fit? – Teste dein Wissen!

Aufgabe 1 (4 + 4 + 4 Punkte)

Die **Pyramiden von Gizeh** in Ägypten sind das einzig Erhaltene der sieben Weltwunder der Antike. Es sind drei quadratische, gerade Pyramiden, welche sich nur 15 km vom Stadtkern von Kairo, der ägyptischen Hauptstadt, befinden. Es ist eine Formation aus drei kleinen Pyramiden, den Königinnenpyramiden, und drei großen Pyramiden, von denen wir in dieser Aufgabe einige Maße berechnen wollen. Wir beziehen uns dabei auf die ursprünglichen Maße. Es ist wichtig, dies zu erwähnen, da die Pyramiden aufgrund der Witterungsverhältnisse bis zu 7 m an Höhe verloren haben.

Die Pyramiden von Gizeh

a) Die größte dieser Pyramiden ist die **Cheops-Pyramide**. Die Länge der Grundseite betrug ca. 233 m, ihre Höhe ca. 146 m. Berechne die Höhe der Dreiecksflächen und die Länge der Seitenkante der Pyramide.

b) Die zweitgrößte der Pyramiden ist die **Chepren-Pyramide**. Die Grundseite hat eine Länge von 215 m und die Seitenflächen haben eine Höhe von 179,30 m. Wie hoch ist diese Pyramide? Und wie lang sind die Seitenkanten?

c) Im Gegensatz zu den beiden oben genannten Pyramiden ist die **Mykerinos-Pyramide** klein. Dennoch hat eine Seitenfläche eine Höhe von 83,32 m und die Seitenkantenlänge beträgt 97,95 m. Wie lang ist die Grundfläche dieser Pyramide? Und wie hoch ist sie?

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Laut Bauverordnung darf eine Rampe für Rollstuhlfahrer höchstens eine Steigung von 6 % aufweisen. Wie lang muss die Strecke der Rampe mindestens sein, wenn eine Höhe von 72 cm, also die Höhe von ca. 4 Stufen, überwunden werden muss?

Aufgabe 3 (8 Punkte)

Herr Hengel möchte die Dachrinne seines Hauses säubern. Diese befindet sich in einer Höhe von 2,70 m. Um an diese Dachrinne zu gelangen, muss er auf eine seiner beiden Leitern steigen.

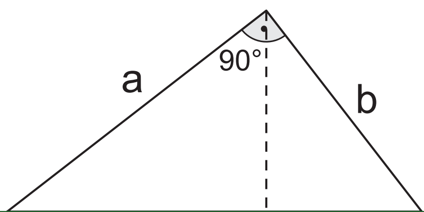
Er hat eine 2,20 m lange Klappleiter, deren Füße in einem Abstand von 1,30 m aufgestellt werden müssen und eine 2,50 m lange Anlegeleiter, die in einem Abstand von 85 cm zur Wand positioniert werden muss, um einen sicheren Stand zu gewähren.

Welche Leiter sollte er benutzen?

Aufgabe 4 (6 Punkte)

Die beiden Dachschrägen des Hauses aus der nebenstehenden Illustration bilden einen rechten Winkel.

Wie lang sind die Dachschrägen?



Lösungen und Tipps zum Einsatz

M 1 Sehenswürdigkeiten aus aller Welt

1. Die Höhe einer Dreiecksfläche beträgt:

$$h=\sqrt{\left(\frac{35,42}{2}\right)^2+21,65^2}\approx 27,97\ [\mathrm{m}].$$

Damit beträgt die Gesamtfläche ca.

$$4\cdot\frac{35,42\cdot 27,97}{2}=1981,3948\ [\mathrm{m}^2].$$

2. a) Die halbe Diagonale hat eine Länge von

$$\sqrt{175^2-107^2}\approx 138,48\ [\mathrm{m}].$$

Damit gilt für die Breite b des Hotels:

$$2\cdot\left(\frac{b}{2}\right)^2=175^2-107^2,\ \text{also}\ b=2\cdot\sqrt{\frac{1}{2}\cdot(175^2-107^2)}\approx 195,84\ [\mathrm{m}].$$

b) Eine Dreiecksfläche hat daher eine Höhe von

$$h=\sqrt{175^2-\left(\frac{195,84}{2}\right)^2}\approx 145,04\ [\mathrm{m}].$$

Damit beträgt die Fläche einer Seite:

$$145,04\cdot 195,84\cdot\frac{1}{2}\approx 14.202,32\ [\mathrm{m}^2].$$

3. a) Für die Länge x gilt:

$$x^2+\left(\frac{4}{9}x\right)^2=35,57^2\Leftrightarrow\frac{97}{81}x^2=35,57^2\Leftrightarrow x^2=\frac{81}{97}\cdot 35,57^2\Leftrightarrow x=\sqrt{\frac{81}{97}\cdot 35,57^2}\approx 32,50\ [\mathrm{m}].$$

Damit ergibt sich eine Breite b von $b=\frac{4}{9}\cdot 32,50\approx 14,44\ [\mathrm{m}]$.

b) Die gesuchte Höhe h beträgt:

$$h=\frac{4}{9}\cdot 14,44\approx 6,42\ [\mathrm{m}].$$

c) Für die Länge d der Diagonale gilt: $d^2=14,44^2+6,42^2=249,73\Leftrightarrow d\approx 15,80\ [\mathrm{m}]$.

d) Für das Verhältnis der Diagonalen gilt: $\frac{15,80}{35,57}\approx 0,4442\approx\frac{4}{9}$.

Es fällt also auf, dass dies (ungefähr) das gleiche Verhältnis ist wie beispielsweise das, in dem Breite und Länge der Grundfläche zueinander stehen. Rechnerisch lässt sich dies wie folgt begründen:

$$\frac{4}{9}=\frac{b}{x}=\sqrt{\frac{b^2}{x^2}}=\sqrt{\frac{b^2}{x^2}\cdot 1}=\sqrt{\frac{b^2}{x^2}\cdot\frac{1+\frac{h^2}{b^2}}{1+\frac{h^2}{b^2}}}=\sqrt{\frac{b^2+h^2}{x^2+\left(\frac{x^2h^2}{b^2}\right)}}=\sqrt{\frac{b^2+h^2}{x^2+\left(\frac{9}{4}h\right)^2}}=\sqrt{\frac{b^2+h^2}{x^2+b^2}}=\frac{15,80}{35,57}$$

e) Zieht man den Durchmesser aller Säulen von der Länge der Grundseite ab, so erhält man: $32,50-13\cdot 1,02=19,24\ [\mathrm{m}]$.

Aufgeteilt auf 12 Zwischenräume ergibt dies einen Abstand von: $\frac{19,24}{12}\approx 1,60\ [\mathrm{m}]$.

I/D