

# Sinus, Kosinus und Tangens – Anwendungsaufgaben zur Trigonometrie auf zwei Niveaus

Beitrag von Stefanie Ginaidi, Frankfurt am Main

Illustriert von Julia Lenzmann, Stuttgart



Kronenhochhaus: www.colourbox.com;  
Erde: Thinkstock/Hemera; Solarzellen: Luise/pixelio.de

Wie hoch ist das Kronenhochhaus in Frankfurt am Main? Welchen Umfang hat die Sonne und unter welchem Winkel arbeitet eine Solaranlage am besten? Lassen Sie es Ihre Schülerinnen und Schüler herausfinden.

<b>Klasse</b>	9/10
<b>Dauer</b>	4 Stunden
<b>Inhalt</b>	Trigonometrische Grundbeziehungen vertiefen: Sinus, Kosinus und Tangens; geometrische Begriffe anwenden zum Kreis: Radius, Durchmesser und Umfang; geometrische Begriffe anwenden zu Prismen: Querschnitt, Oberfläche und Volumen
<b>Kompetenzen</b>	mathematische Probleme lösen (K2); mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)
<b>Ihr Plus</b>	mit Ideen zur Projektarbeit

## Didaktisch-methodische Hinweise

Trigonometrische Beziehungen werden in vielen verschiedenen Bereichen angewendet – in der **Geodäsie**, der **Astronomie**, der **Navigation von Schiffen oder Flugzeugen** und auch bei der Analyse von **akustischen, mechanischen oder elektromagnetischen Wellen**. Deshalb ist es wichtig, dieses Thema nachhaltig im Unterricht zu behandeln und unter verschiedenen Aspekten zu vertiefen.

Nutzen Sie die differenzierten Materialien als **Gruppenarbeit**, **Stationenarbeit** oder auch als **Lerntheke**, um die Grundlagen der Trigonometrie in verschiedenartigen, anwendungsbezogenen Aufgaben zu üben. Sie bieten sich zur **Wiederholung** der bereits erworbenen Kenntnisse an, zum Beispiel nach den Ferien oder zur **Vorbereitung auf eine Prüfung**.

### Das sollten Ihre Schüler bereits können

Diese Übungseinheit baut auf die trigonometrischen Funktionen auf, sodass die Kenntnis der Funktionen **Sinus, Kosinus und Tangens vorausgesetzt** wird. Die Einführung kann jedoch auch schon ein Schuljahr zurückliegen und **mit dem Arbeitsblatt M 1 aufgefrischt** werden. Je nach Arbeitsblatt werden verschiedene Grundfertigkeiten im Bereich der Geometrie vorausgesetzt, wie die Berechnung von Umfängen, Flächen und Volumina **geometrischer Formen und Körper**. Insbesondere werden gleichschenklige Dreiecke (M 3 und M 7), ein regelmäßiges Sechseck (M 5), der Kreis (M 9) und das Trapez (M 11) behandelt.

### Binnendifferenzierung

Die Materialien sind mit **zwei verschiedenen Schwierigkeitsgraden** gekennzeichnet: ★ oder ★★. Aufgaben mit einem Stern (★) sind eher einfach und ohne komplexen Zusammenhang aufgebaut und die Aufgaben mit zwei (★★) Sternen sind schwierig zu lösen und behandeln einen komplexen Sachzusammenhang. Sie können somit entweder ein **Niveau vorgeben** oder die **Lernenden schätzen sich selbst ein**.

Zusätzlich zu den zwei Schwierigkeitsgraden gibt es zu jedem Arbeitsblatt Hilfestellungen in Form von **Tippknickern**. Diese geben – je nach Niveau der Aufgabenstellung (★ oder ★★) – unterschiedlich konkrete Hinweise, ohne die Lösung vorwegzunehmen.

### So geht's: Gruppenarbeit zur Wiederholung

Bevor die Schülerinnen und Schüler in Gruppen arbeiten, **wiederholen** Sie die trigonometrischen Funktionen mithilfe des **Arbeitsblattes (M 1)** „Wie war das noch mal? – Trigonometrie“ mit der Methode „Think – Pair – Share“.

Nach der Wiederholungsphase legen Sie zur Motivation den **oberen Teil der Folie (M 2)** „Unsere Umwelt mit Dreiecken berechnen“ auf. So können sich die Lernenden besser auf die Aufgabenstellungen einstellen und wissen, welche Themen die Mitschülerinnen und Mitschüler bearbeiten. Dabei können sich schon Lerngruppen von drei bis vier Schülerinnen und Schülern bilden, die jeweils zwei der **Aufgabenblätter M 3, M 5, M 7 oder M 9 bearbeiten**.

**Tipp** Weisen Sie die Lernenden bereits hier auf die Schwierigkeitsgrade hin.

Zu jedem Aufgabenblatt gibt es einen **Tippknicker M 4, M 6, M 8 und M 10**. Die Schülerinnen und Schüler können so nacheinander Hinweise zur grundlegenden Lösungsidee der Teilaufgaben aufdecken. Sie können die Tippknicker auch auseinanderschneiden und einzeln als Tippkarten anbieten. Kontrollieren Sie die Aufgaben anschließend im **Klassengespräch**, sodass jede Gruppe ihre **Ergebnisse vorstellen** kann. Alternativ bietet sich eine Selbstkontrolle mit den Lösungsblättern an.

## Auf einen Blick

### Stunde 1 Trigonometrische Funktionen wiederholen

M 1 (Ab) Wie war das noch mal? – Trigonometrie

### Stunde 2/3 Vertiefung auf dem eigenen Niveau

M 2 (Fo) Unsere Umwelt mit Dreiecken berechnen  
Der Neigungswinkel einer Solaranlage

M 3 (Ab) Solaranlagen – eine Dachneigung berechnen ★

M 4 (Tx) Tippknicker zu M 3 – Solaranlagen ★

M 5 (Ab) Pralinen – Vielecke berechnen ★

M 6 (Tx) Tippknicker zu M 5 – Pralinen ★

M 7 (Ab) Wolkenkratzer – die Höhe eines Objekts bestimmen ★★

M 8 (Tx) Tippknicker zu M 7 – Wolkenkratzer ★★

M 9 (Ab) Himmelskörper – Winkelbeziehungen nutzen ★★

M 10 (Tx) Tippknicker zu M 9 – Himmelskörper ★★

### Stunde 4 Lernerfolgskontrolle

M 11 (Lk) Fit für den Test? – Trigonometrie anwenden

#### Legende der Abkürzungen:

Ab: Arbeitsblatt; Fo: Folie; Lk: Lernerfolgskontrolle; Tx: Text

#### Minimalplan

Die Zeit ist knapp und Sie möchten die **trigonometrischen Funktionen** in ein bis zwei Schulstunden wiederholen oder mit einer Anwendungsaufgabe ins Gedächtnis rufen? Dann nutzen Sie folgende Materialien, um zu ...

<b>wiederholen:</b>	<b>M 1</b>	Grundlagen auffrischen
	<b>M 11</b>	Lernerfolgskontrolle mit Anwendungsaufgabe
<b>vertiefen:</b>	<b>M 3</b>	Anwendungsaufgabe (★) mit den Tippknickern M 3
	<b>M 5</b>	Anwendungsaufgabe (★) mit den Tippknickern M 5
	<b>M 7</b>	Anwendungsaufgabe (★★) mit den Tippknickern M 7
	<b>M 9</b>	Anwendungsaufgabe (★★) mit den Tippknickern M 9

Die Lösungen zu den Materialien finden Sie ab Seite 24.

# Unsere Umwelt mit Dreiecken berechnen

M 2



Wie hoch ist dieser Wolkenkratzer in Frankfurt am Main?



Welchen Umfang haben Sonne, Mond und Erde?



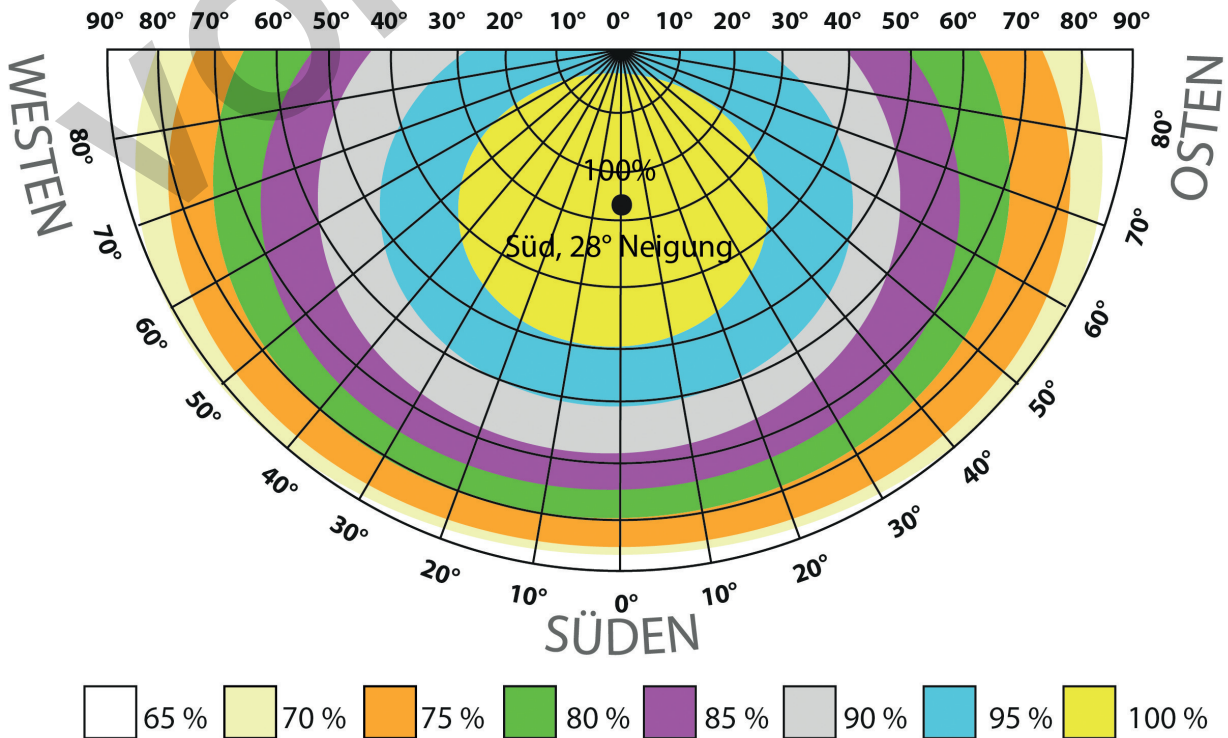
Wie werden Süßigkeiten originell verpackt?



Gibt es einen optimalen Platz für Solaranlagen?

Kronenhochhaus: www.colourbox.com; Süßigkeiten: Thinkstock/Photos; Erde: Thinkstock/Hemera; Solarzellen: Luise/pixelio.de

## Der Neigungswinkel einer Solaranlage



### M 3 Solaranlagen – eine Dachneigung berechnen ★

#### Informationen zum Landhaus

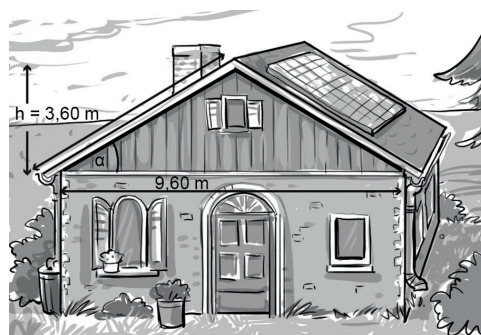
Das Dach hat eine Breite  $b$  von 9,60 m.

Die Giebelhöhe  $h$  beträgt 3,60 m.

#### Das Landhaus von Familie Schulze

Das Landhaus wird mit einer Solaranlage ausgestattet. Laut Hersteller funktioniert diese optimal bei einem Neigungswinkel von  $30^\circ$ – $40^\circ$ .

Das Landhaus hat einen Standort von  $75^\circ$  Ost.

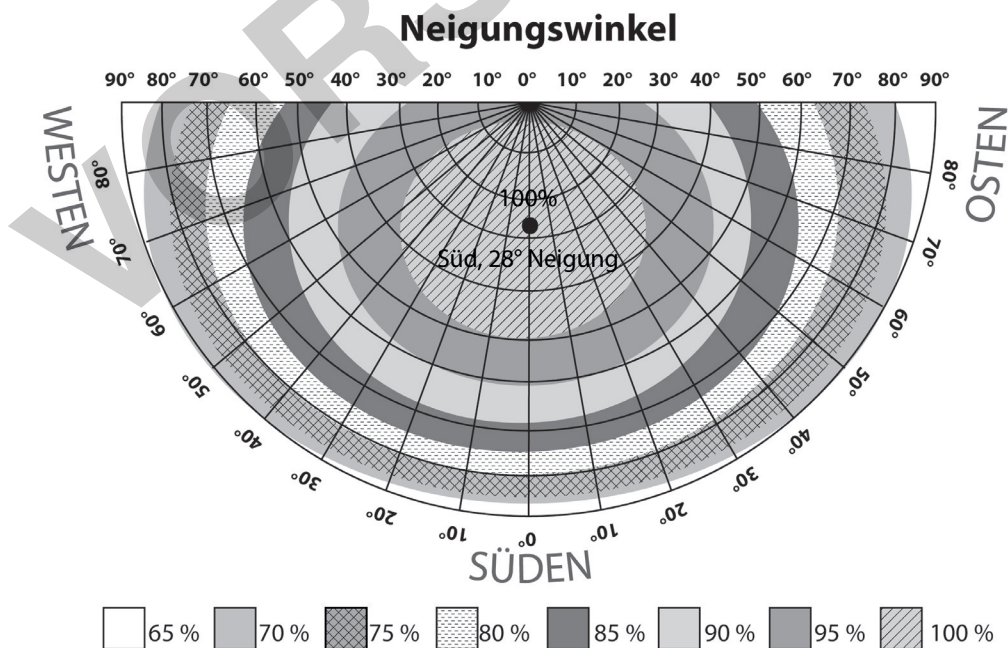


#### Aufgabe 1

- Lies die „Informationen zum Landhaus“.
- Erstelle eine Skizze zum Dach und markiere rechte Winkel.
- Bestimme den Winkel  $\alpha$  rechnerisch.
- Bestimme die Länge  $l$  der Sparren.
- Bestimme die Größe des Giebelwinkels  $\gamma$ .

#### Aufgabe 2

- Lies den Text „Das Landhaus von Familie Schulze“. Kann die Solaranlage optimal funktionieren? Begründe deine Meinung.
- Zu wie viel Prozent sind die Solarzellen ausgelastet? Nutze die Grafik zum Neigungswinkel.
- Welche Neigungswinkel wären für das Landhaus ideal?



Quelle: [http://www.rechnerphotovoltaik.de/images/voraussetzungen/dachausrichtung\\_ertrag\\_sonnenstand.gif](http://www.rechnerphotovoltaik.de/images/voraussetzungen/dachausrichtung_ertrag_sonnenstand.gif)

- Warum wurde das Dach des Hauses nicht mit idealem Winkel für Solaranlagen gebaut? Welche Gründe sprechen für diese Dachneigung, welche dagegen? Begründe deine Vermutungen.
- Stell dir vor, das Dach ist zu flach oder zu steil geneigt. Welche Möglichkeit gibt es, eine Anlage dennoch unter optimalem Winkel zu installieren?

## Tippknicker zu M 3 – Solaranlagen ★

M 4

### Tippknicker zu: Solaranlagen

#### Aufgabe 1

Tipp

Das Dach ist ein **gleichschenkliges Dreieck** und ist somit symmetrisch.

**Beachte:** Es gibt zwei rechtwinklige Dreiecke mit dem Winkel  $\alpha$  und den Seiten  $b/2$  und  $l$ .

Hier ist der **Giebelwinkel**  $\gamma$  eingezeichnet. Es gibt mehrere Möglichkeiten, ihn zu bestimmen.

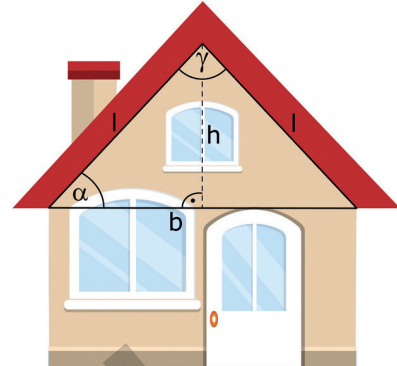


Illustration: www.colourbox.com

#### Aufgabe 2a) bis c)

Tipp

Den Neigungswinkel  $\alpha$  hast du in Aufgabe 1b) berechnet.

Berücksichtige beim Ablesen den **Standort** und den **Neigungswinkel** des Daches.

Diese Solaranlage hinter mir ist im Diagramm zum Neigungswinkel eingezeichnet.

Sie hat einen Standort von  $0^\circ$  im Süden. Der Neigungswinkel liegt hier bei  $28^\circ$ . Für 100 % Auslastung kann die Solaranlage zwischen  $5^\circ$  und  $50^\circ$  geneigt sein.



Foto: Thinkstock/iStockphotos

#### Aufgabe 2d) bis e)

Tipp

Zeichne eine Skizze des Hauses mit einem optimalen Neigungswinkel. Was fällt dir auf?

Schau dir das Bild rechts an.

Was fällt dir auf für den Neigungswinkel dieser Solarzellen.



Photovoltaikanlage zur Erwärmung von Wasser mit Sonnenenergie

Foto: www.colourbox.com

An den gestrichelten Linien nach oben knicken!

## Hinweise (M 3 und M 4)

Ihre Schülerinnen und Schüler lösen einfache Aufgaben zu den Maßen eines Daches. Die Ergebnisse werden angewandt, um den Neigungswinkel zum Aufbau einer Solaranlage auf dem Landhaus von Familie Schulze zu ermitteln.

In **Aufgabe 1 berechnen** die Lernenden alle **notigen Größen**, wie den Steigungswinkel des Daches, den Giebelwinkel sowie die Länge der Sparren. Dabei hilft ihnen der **erste Tipp des Tippknickers (M 4)** mit einer beschrifteten Skizze zu allen benötigten Größen.

In **Aufgabe 2** müssen die Schülerinnen und Schüler die Verbindung zwischen dem Neigungswinkel der Solaranlage und dem Neigungswinkel des Daches herstellen. Erst danach lösen sie die Aufgabe. Der Schwerpunkt von Aufgabe 2 liegt in der **Interpretation der Grafik zum Neigungswinkel**. Die zugehörigen Tipps erläutern den eingezeichneten Wert in der Grafik. In den letzten zwei Teilaufgaben 2d) und e) stellen die Lernenden einen Realitätsbezug her. Gerade hier gibt der letzte Tipp schon eine konkrete Lösung vor. Halten Sie die Schülerinnen und Schüler an, sich eine weitere Möglichkeit zu überlegen, wie eine Solaranlage im richtigen Neigungswinkel installiert werden kann.

**Hinweis** Das Diagramm zum Neigungswinkel richtet sich nach der Ausrichtung des Daches. Da die Sonne nie am Nordhimmel scheint, gibt es keinen optimalen Neigungswinkel zur Nordrichtung.

Nutzen Sie den **zweiten Teil der Folie (M 2)**, um die Aufgabe im Plenum zu besprechen. So können Schülergruppen mit anderen Aufgabenstellungen die Präsentation besser nachvollziehen.

### Projektarbeit – „Die Solaranlage auf dem Dach“

Nachdem die Gruppe das **Arbeitsblatt beendet** hat, **folgt** die **Projektaufgabe**. Diese können Sie enger fassen oder freier gestalten. Geben Sie jeder Gruppe einen Kompass oder lassen Sie die Schülerinnen und Schüler ihre **Smartphones** nutzen, die einen **Kompass** integriert haben.

Folgende Aufgabenstellungen bieten sich auf dem Schulgelände an:

Stellt euch vor, ihr sollt auf unserem Schuldach eine Solaranlage installieren. Geht wie beim Landhaus von Familie Schulze vor. Nutzt einen Kompass, um den Standort so genau wie möglich zu bestimmen. Erstellt auch eine Skizze, wie ihr die Solaranlage unter dem optimalen Winkel ausrichten könnt.

**Hinweis** Beachtet, dass auf der Nordseite der Schule keine Solaranlage installiert werden kann, da die Sonne nie aus dieser Richtung scheint.

Zur **Ergebnissicherung** bietet sich eine **Präsentation für den Beamer** oder ein **DIN-A1-Plakat** an. So können die Gruppen ihre verschiedenen Ergebnisse der Klasse vorstellen oder im Klassenzimmer aushängen.

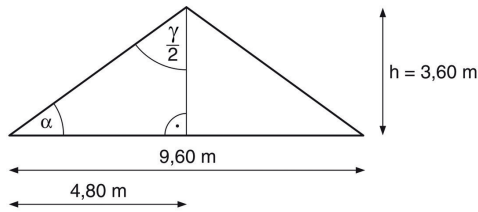
### Zusatzmaterial

- |                   |                                   |
|-------------------|-----------------------------------|
| ■ Schere          | Für die Projektarbeit pro Gruppe: |
| ■ Briefumschläge  | ■ Kompass oder Smartphone         |
| ■ Klarsichthüllen | ■ DIN-A1-Plakat                   |

## Lösungen (M 3) Solaranlagen – eine Dachneigung berechnen

### Aufgabe 1

b)



$$c) \tan \alpha = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Ankathete von } \alpha} = \frac{3,60 \text{ m}}{4,80 \text{ m}} = 0,75 \quad \rightarrow \quad \alpha = \tan^{-1}(0,75) \approx \underline{36,9^\circ}$$

Damit ergibt sich für den Winkel  $\alpha = 36,9^\circ$ .

d) Wenn  $\alpha$  bekannt ist, lässt sich die Länge  $l$  der Sparren mit dem Sinus berechnen:

$$\sin \alpha = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Hypotenuse}} = \frac{3,60 \text{ m}}{l} \quad \rightarrow \quad l = \frac{3,60 \text{ m}}{\sin(36,9^\circ)} \approx \underline{6,00 \text{ m}}$$

Die Länge  $l = \underline{6,00 \text{ m}}$ .

e) Das Dach ist ein gleichschenkliges Dreieck. Somit halbiert die Höhe  $h$  den Giebelwinkel  $\gamma$ .

Bei jedem Dreieck gilt zusätzlich: Die Summe aller Winkel im Dreieck beträgt  $180^\circ$ . Es folgt:

$$\text{Halber Giebelwinkel } \gamma = 180^\circ - \text{den rechten Winkel} - \alpha = 180^\circ - 90^\circ - 36,9^\circ = 53,1^\circ$$

$$\text{Giebelwinkel } \gamma = 2 \cdot 53,1^\circ = 106,2^\circ.$$

Damit ist der ganze Giebelwinkel  $\gamma = 106,2^\circ$  groß.

### Aufgabe 2

a) Der optimale Neigungswinkel der Solaranlage liegt laut Hersteller zwischen  $30^\circ$  und  $40^\circ$ . Der Neigungswinkel  $\alpha$  des Daches ist gleich dem Neigungswinkel der Solaranlage, wenn sie direkt auf dem Dach befestigt wird. Da  $\alpha = 36,9^\circ$  und somit zwischen  $30^\circ$  und  $40^\circ$  liegt, kann die Solaranlage optimal funktionieren.

b) Das Landhaus hat einen Standort von  $75^\circ$  Ost. Rechts im Diagramm geht man bis zur  $75^\circ$ , um den östlichen Standort zu finden. Jetzt fährt man die Linie in Richtung Mitte nach, bis zur Zeile des Neigungswinkels von etwa  $35^\circ$ , wie in der Abbildung rechts.

Die Ausnutzung ist sehr gut, sie liegt genau zwischen 90 % und 95 %.

c) Ideal sind die Winkel zwischen ca.  $0^\circ$  und  $30^\circ$ , weil sich hier die Ausnutzung etwa 95 % beträgt.

d) Je flacher der Winkel ist, desto besser ist die Ausnutzung. Aber ein sehr flacher Winkel wäre ungeeignet für den Abfluss von Niederschlägen. Regen oder Schnee könnten nicht abfließen und das Dach könnte unter der Last zusammenbrechen. Gibt es jedoch keinen Schnee oder nur wenig Regen, bietet sich ein flaches Dach gut an.

e) Wenn die Neigung des Daches nicht für eine Solaranlage geeignet ist, müssen die Solarzellen entsprechend abgestützt werden. Ist das Dach zu flach, muss die Solarzelle nach vorn gekippt werden, dann wird der Neigungswinkel größer. Ist der Winkel zu steil, muss die Solarzelle von unten gestützt werden.

