

Reihe 49 S 1	Verlauf	Material	LEK	Glossar	Lösungen
------------------------	----------------	-----------------	------------	----------------	-----------------

Eine Grundvorstellung vom Funktionsbegriff entwickeln – ein Konzept für die Praxis

Tom Bauernfeind, Dortmund

Quelle der Grafik: www.mpib-berlin.mpg.de/Pisa/beispielaufgaben.html. © OECD/PISA



Der Graph zeigt den Geschwindigkeitsverlauf eines Rennradfahrers bei der Tour de France während einer „fliegenden“ Runde auf den Champs Elysées in Paris.

Klasse: 9./10. Klasse

Dauer:

- je nach Einsatz, ca. 3 Doppelstunden für die Bearbeitung aller vier Module (in diesem Beitrag: nur das **Basismodul B**, die restlichen Module finden Sie in einem Folgebeitrag)
- für den **Diagnose-Test** ca. 40 Min, bei gemeinsamer Auswertung durch die Lernenden ca. 1 Doppelstunde, für das Basismodul ca. 1 Schulstunde

Inhalt: Diagnose der Ausprägung der Grundvorstellungen zu Funktionen

- Grundsätzliches zum Funktionsbegriff
- Darstellungsweisen von Funktionen
- Funktionsterme, Funktionsgleichungen
- Berechnen von Funktionswerten
- Darstellungswechsel

Ihr Plus:

- ✓ komprimiertes Fachwissen
- ✓ praktikabler Diagnostest (und Nachtest in einem Folgebeitrag)
- ✓ Module, die im Gesamtkonzept oder aber isoliert einsetzbar sind
- ✓ insbesondere geeignet für den Förderunterricht

Didaktisch-methodische Hinweise

Der vorliegende Beitrag beinhaltet **Diagnose-** und individuell zusammenstellbares **Fördermaterial zum Funktionsbegriff**. Setzen Sie bei den vorhandenen Kompetenzen Ihrer Lernenden an und entwickeln Sie diese gezielt weiter!

Fördermaterialien zum Umgang mit Funktionen gibt es viele, wenige rücken jedoch die Entwicklung von **Grundvorstellungen** seitens der Lernenden differenziert in den Fokus der Betrachtung. Das vorgestellte Konzept zeigt einen praxiserprobten Diagnose- und Förderansatz, der diesem Umstand begegnet, indem Grundvorstellungen differenziert in den Blick genommen und explizit thematisiert werden.

Einführung und Genese – Lehrplanbezug

Die Analyse von Funktionen stellt einen zentralen Inhalt der **gymnasialen Oberstufe** dar, der auch im **Abitur** abgeprüft wird. Die Beiträge der Schüler zeigen in der Praxis jedoch häufig, dass die Lernenden nicht über die nötigen **Basiskompetenzen** zu Beginn der Sekundarstufe II verfügen. Dies verdeutlicht ein kurzer Auszug eines beobachteten Unterrichtsgesprächs:

Lehrerin: „Wie ändert sich denn an dieser Stelle die Funktion?“

Schüler: „Wie meinen Sie das? Ändert sich die Funktion? Die Funktion bleibt doch gleich, also der Graph.“

Lehrerin: „Wie verändern sich die Funktionswerte, wenn sich die Stelle ändert?“

Schülerin: „Wie soll sich denn eine Stelle ändern? Das ist doch eine Zahl auf der x-Achse.“

Lehrerin: „Bevor wir uns mit der Frage nach der Veränderung weiter beschäftigen, lasst uns doch mal etwas Grundsätzliches klären: Was ist überhaupt eine Funktion?“

Schüler: „Eine Funktion ist ein Graph.“



Die Abbildung unten zeigt exemplarisch weitere Schülerbeiträge, die im Rahmen der Durchführung des vorliegenden Konzepts entstanden sind. Wenngleich diese Beiträge wichtige Aspekte von Funktionen ansprechen, kann von einem Grundverständnis des Funktionsbegriffs, welches die Aspekte **Zuordnung**, **Veränderung** und **Gesamtverlauf** in gewisser Weise implizit umfassen sollte, nicht ausgegangen werden.

Oft liest man in der fachdidaktischen Literatur von Grundvorstellungen über Funktionen. Allzu selten jedoch etwas darüber, wie man die Entwicklung dieser konkret bei den Lernenden fördern kann, wenn man bestimmte Schwierigkeiten diagnostiziert hat.

Vor diesem Hintergrund entstand die Idee zur Entwicklung des im Folgenden vorgestellten Diagnose- und Fördermoduls.

F1

a) Was ist eine Funktion? Beschreiben Sie mit Ihren eigenen Worten, was Sie unter dem Begriff „Funktion“ verstehen.

Ich verstehe unter dem Begriff „Funktion“ eine Gleichung, die einen Graphen beschreibt, sprich, wie z.B. Geraden verlaufen usw.

F1

a) Was ist eine Funktion? Beschreiben Sie mit Ihren eigenen Worten, was Sie unter dem Begriff „Funktion“ verstehen.

- Geraden

Funktionen sind Gleichungen, die den Verlauf einer Geraden darstellen - und deren Steigung.

Konzeption des Diagnose- und Förderkonzepts

Insbesondere der an Material der **Projektgruppe SINUS-NRW** (Brauner, Hoffert, 2013) angelehnte **Eingangstest (M 1)** zur Diagnose von Schülerkompetenzen für den Übergang in die Sekundarstufe II stellt eine hervorragende Möglichkeit dar, die Diagnose...

Fazit

Ziel des vorgestellten Konzepts ist die systematische Diagnose und Förderung der Grundvorstellungen zum Funktionsbegriff. Im Hinblick auf den expliziten Umgang mit diesen Aspekten sowie die differenzierte Auswertung von Schülerbearbeitungen wird eine Perspektive für die konsequente Integration des fachdidaktischen Konzepts der Grundvorstellungen in den Mathematikunterricht geschaffen, die für alle Beteiligten spannend sowie praktikabel ist. Insofern stellt es für den Unterricht ein weiteres Diagnose- und Förderinstrument zur Verfügung, welches aus Erfahrung des Autors individuelle Fortschritte bedingt spür- und sichtbar macht.

Zunächst liegt diesem Beitrag das Material zum **Diagnostetest (M 1)** sowie zum Basiswissen **Modul B (M 5 und M 6)** bei. Die Module zur Zuordnungsvorstellung (Modul Z), Kovariationsvorstellung (Modul K) und zur Objektvorstellung (Modul O) folgen zu einem späteren Zeitpunkt.

Literatur

Blum, W. & vom Hofe, R. (2003): Welche Grundvorstellungen stecken in der Aufgabe? *Mathematik Lehren* 118, S.14 – 18.

Brauner, U. & Hoffert, U. (2013): Diagnose beim Übergang in die Sekundarstufe II. *Praxis der Mathematik*, Heft 51/2013. S. 34 – 38.

Büchter, A., Henn, H.-W. (2010): *Elementare Analysis. Von der Anschauung zur Theorie.* Heidelberg: Spektrum.

Leuders, T., Prediger, S. (2005): Funktioniert's? – Denken in Funktionen. *Praxis der Mathematik*, Heft 2/2005. S. 1 – 7.

Malle, G. (2000): Zwei Aspekte von Funktionen: Zuordnung und Kovariation. *Mathematik Lehren* 103: 8 – 11.

Vom Hofe, R. (1995): *Grundvorstellungen mathematischer Inhalte.* Heidelberg: Spektrum.

Vom Hofe, R. (2003): Grundbildung durch Grundvorstellungen. *Mathematik Lehren* 118, 4 – 8.

Vollrath H.-J. (1989) Funktionales Denken. *Journal für Mathematikdidaktik*, 10 (1), S. 3 – 37.

Bezug zu den Bildungsstandards der Kultusministerkonferenz

Allg. mathematische Kompetenz	Leitidee	Inhaltsbezogene Kompetenzen Die Schüler können ...	Anforderungsbereich
K 1, K 3, K 4, K 5, K 6	L 4	... Funktionen von Zuordnungen abgrenzen und Eigenschaften von Funktionen benennen, ... Funktionswerte berechnen, ... bewusst zwischen Darstellungsweisen unterscheiden und diese auch bewusst wechseln.	I – II, z.T. III

Für welche Kompetenzen und Anforderungsbereiche die Abkürzungen stehen, finden Sie auf der beiliegenden CD-ROM 62.

Reihe 49 S 10	Verlauf	Material	LEK	Glossar	Lösungen
-------------------------	----------------	-----------------	------------	----------------	-----------------

Auf einen Blick

Material	Thema	Stunde
M 1	Eingangstest Funktionen Testaufgaben zur Ausgangsdiagnose und zum Erstellen eines Arbeitsplans	1./2.
M 2	Items des Eingangstests Übersicht über die Gewichtung der einzelnen Grundvorstellungen je Testitem	
M 3	Individueller Arbeitsplan Arbeitsplan für die Lernenden	
M 4 (Fo)	Übersicht über den Aufbau des Konzepts Schafft Transparenz für die Lernenden und sollte während der Arbeit projiziert werden.	
M 5	Modul B – Basiswissen Einführungstext zum Basismodul. Dieses muss jedem Lernenden in Kopie vorliegen.	3./4.
M 6	Modul B – Aufgaben und Lösungen Aufgabenmaterial zur eigenständigen Durcharbeit.	5.

Minimalplan

Je nach Intention, Bedarf oder zeitlichen Aspekten können Sie zur Diagnose des Ist-Zustandes der Lernenden allein den **Diagnosetest (M 1)** verwenden und ggf. darauf reagieren, indem Sie den Lernenden individuelle Rückmeldung und Förderempfehlungen geben.

Alternativ können Sie auf die Diagnose verzichten, und alle Lernenden arbeiten an einzelnen Modulen, da diese losgelöst voneinander einsetzbar sind. So können Sie in einzelnen Stunden bzw. Doppelstunden und Hausaufgaben für einzelne Module (**M 5** und **M 6**, weitere Module folgen!) nutzen.

I/C

Reihe 49	Verlauf	Material S 1	LEK	Glossar	Lösungen
----------	---------	-----------------	-----	---------	----------

M 1 Eingangstest Funktionen¹

F1

- a) Was ist eine Funktion? Beschreiben Sie mit Ihren eigenen Worten, was Sie unter dem Begriff „Funktion“ verstehen. B (3)
- b) Welche Darstellungsweisen für Funktionen kennen Sie? (D.h. in welchen Formen sind Ihnen Funktionen bisher begegnet?) B (5)

F2					
Bitte kreuzen Sie je Zeile genau eine Antwort an.				Korrektur	
	richtig	falsch			
a) Funktionen lassen sich sprachlich nicht angeben bzw. darstellen.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	B (1)		
b) Eine Funktion ordnet einem Wert immer mindestens einen anderen Wert zu.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	B (1) ZuV (1)		
c) Verändert sich der x-Wert, so verändert sich auch der zugeordnete Funktionswert. Tip Denke an die konstanten Funktionen.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	KoV (2) ZuV (1)		
d) Der Graph einer Funktion ist immer die beste Darstellung derselben. Ein Funktionsterm oder eine Tabelle sind lediglich Hilfsmittel, um den Graphen der Funktion zeichnen zu können.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	B (2) ObV (2)		
e) Mit Funktionen lassen sich nur mathematische Zusammenhänge beschreiben.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	B (2)		
f) Eine Funktion beschreibt den Zusammenhang von zwei Größen.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	B (1) ZuV (1), KoV		
g) Jeder Graph gehört zu einer Funktion.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	B (1)		
h) Eine Funktionsgleichung hat immer die Gestalt $f(x) = \square$.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	B (1)		
i) Jede Zuordnung ist auch eine Funktion.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	B (1)		
j) $f(a) = 3 \cdot a$ ist keine Funktionsgleichung, da kein x vorkommt.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	B (1)		
k) $h(x) = 3 \cdot x$ ist keine Funktion, da kein f vorkommt.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	B (1)		

¹ Eingangstest Mathematik für die Einführungsphase der gymnasialen Oberstufe, in Anlehnung an: Qualitäts- und Unterstützungsagentur - Landesinstitut für Schule (QUA-LiS NRW), SINUS Nordrhein-Westfalen, Projekt M2 - Unterrichtskonzepte für den Übergang von der Sek I zur Sek II mit Blick auf die Anforderungen im Zentralabitur, 2011 (http://www.schulentwicklung.nrw.de/sinus/front_content.php?idart=3198&matId=2479, zuletzt aufgerufen am 10.05.2016)

I/C

Reihe 49	Verlauf	Material S 4	LEK	Glossar	Lösungen
-----------------	----------------	------------------------	------------	----------------	-----------------

M 1 Eingangstest Funktionen – Blatt 4

I/C

F7⁴	
Der abgebildete Graph beschreibt einen Sachzusammenhang. Beschreiben Sie einen Kontext, zu dem der Graph passen könnte. Beachten Sie bei Ihrer Beschreibung den Verlauf des Graphen.	Korrektur
	ZuV (3) KoV (3) ObV (1)

F8⁵											
Wir betrachten die Funktion f mit $f(x) = 2x^2 + x - 1$.	Korrektur										
a) Füllen Sie die Wertetabelle aus. <table border="1" style="display: inline-table; margin-left: 20px;"> <tr> <td>x</td> <td>-3</td> <td>-1,5</td> <td>0</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>f(x)</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </table>	x	-3	-1,5	0	1	f(x)					ZuV (4)
x	-3	-1,5	0	1							
f(x)											
b) Überprüfen Sie rechnerisch, ob der Punkt $P(-2 6)$ auf dem Graphen von $f(x)$ liegt.	ZuV (2) B (2)										
c) Der Punkt S liegt auf dem Graphen der Funktion f . Bestimmen Sie die fehlende Koordinate: $S(2 y)$.	ZuV (2) B (1)										

⁴ Eingangstest Mathematik für die Einführungsphase der gymnasialen Oberstufe, in Anlehnung an: Qualitäts- und UnterstützungsAgentur - Landesinstitut für Schule (QUA-LiS NRW), SINUS Nordrhein-Westfalen, Projekt M2 - Unterrichtskonzepte für den Übergang von der Sek I zur Sek II mit Blick auf die Anforderungen im Zentralabitur, 2011 (http://www.schulentwicklung.nrw.de/sinus/front_content.php?idart=3198&matId=2479, zuletzt aufgerufen am 10.05.2016)

⁵ Eingangstest Mathematik für die Einführungsphase der gymnasialen Oberstufe, in Anlehnung an: Qualitäts- und UnterstützungsAgentur - Landesinstitut für Schule (QUA-LiS NRW), SINUS Nordrhein-Westfalen, Projekt M2 - Unterrichtskonzepte für den Übergang von der Sek I zur Sek II mit Blick auf die Anforderungen im Zentralabitur, 2011 (http://www.schulentwicklung.nrw.de/sinus/front_content.php?idart=3198&matId=2479, zuletzt aufgerufen am 10.05.2016)

Reihe 49	Verlauf	Material S 11	LEK	Glossar	Lösungen
-----------------	----------------	-------------------------	------------	----------------	-----------------

M 5 Modul B – Basiswissen

Einführung

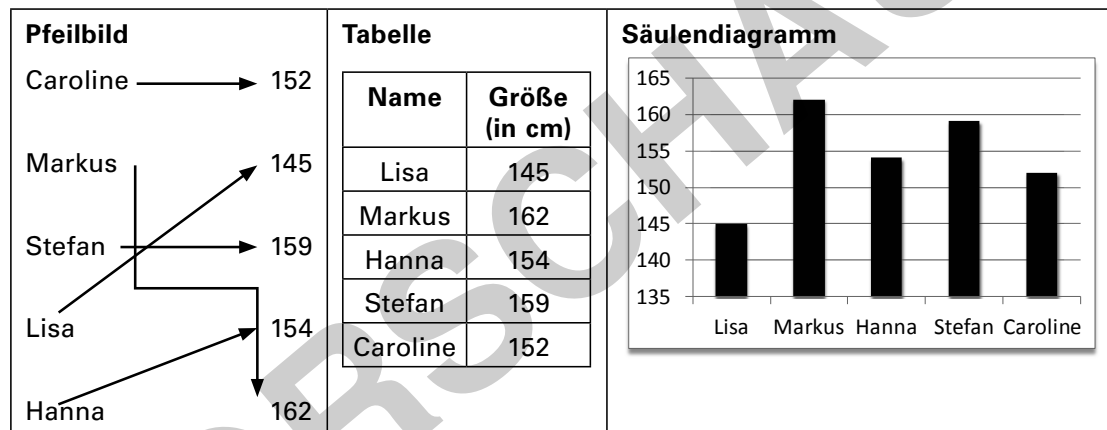
Überall im **Alltag** kommen **Zuordnungen** vor. So wird zum Beispiel jedem Artikel im Supermarkt ein Preis zugeordnet, jedem Käufer im Schuhgeschäft das gekaufte Paar Schuhe, jedem Kinobesucher ein Sitzplatz, jeder Leistung eines Schülers eine Note, jedem Menschen sein Gewicht, usw.

Solche Zuordnungen lassen sich auf viele Arten darstellen. Diese Arten nennt man **Darstellungen** (oder Darstellungsformen einer Zuordnung).

Im Folgenden eine Übersicht:

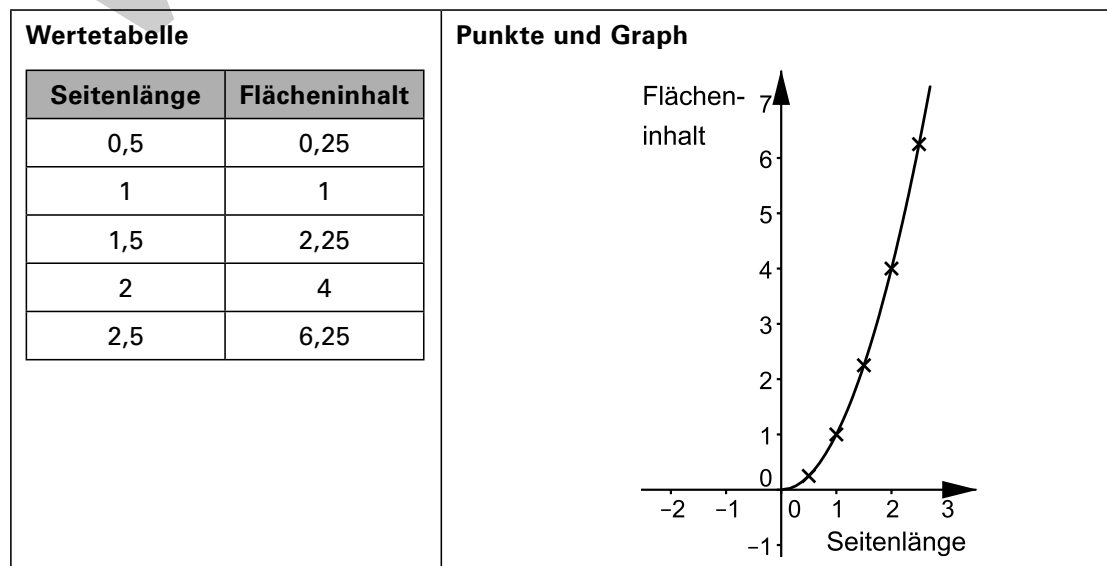
Darstellung von Zuordnungen

Jeder/jedem von fünf Schülerinnen bzw. Schülern wird ihre bzw. seine Körpergröße in Zentimetern zugeordnet.



Etwas abstrakter kann man Zuordnungen auch in einem **Koordinatensystem** darstellen.

Im Folgenden ist die **Wertetabelle** in das Koordinatensystem übertragen worden. Dabei ist es oftmals sinnvoll, die Punkte miteinander zu verbinden. Die dargestellte Zuordnung ordnet der **Seitenlänge eines Quadrates** den **Flächeninhalt des Quadrates** zu:



Aufgabe 4

Wahr oder falsch? Begründen Sie.

- Eine Parallele zur x -Achse kann nicht Graph einer Funktion sein.
- Eine Parallele zur y -Achse kann nicht Graph einer Funktion sein.
- Jede Parallele zur x -Achse hat mit dem Graphen einer beliebigen Funktion höchstens einen gemeinsamen Punkt.
- Jede Parallele zur y -Achse hat mit dem Graphen einer beliebigen Funktion höchstens einen gemeinsamen Punkt.

I/C

Aufgabe 5

Beschreiben Sie die folgenden Funktionen verbal.

Beispiel: $f(x) = 0,5x$ „Jeder Zahl wird die Hälfte der Zahl selbst zugeordnet.“

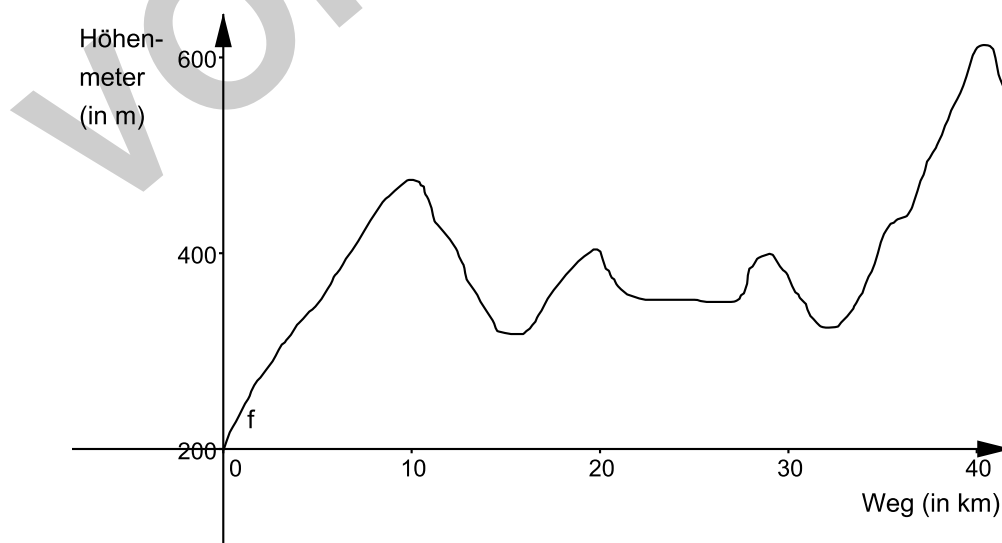
- $f(x) = 2x$
- $h(x) = 7x - 3$
- $c(a) = a^2 + 1$

Aufgabe 6

Ein Freund von Ihnen fragt Sie, ob Sie mit ihm eine Mountainbiketour unternehmen möchten. Da Sie wissen möchten, ob Sie die Tour ohne Weiteres mitfahren (bzw. durchhalten) können, erfragen Sie weitere Informationen zum Streckenverlauf.

Die folgenden Infos bekommen Sie:

Weg (in km)	10	20	25	30	40
Höhenmeter	470	400	350	375	600



Beschreiben Sie sprachlich die Funktion, die den gegebenen Darstellungen zugrunde liegt. Welche Darstellung würden Sie zur Beantwortung Ihrer Frage bevorzugen?

Begründen Sie.