

Knut Voigt und Stephanie Richter



Fit in Mathe bis zum MSA

5. bis 10. Klasse



netzwerk
lernen

zur Vollversion



Fit in Mathe

bis zum MSA

5. bis 10. Klasse

VORSCHAU

Fit in Mathe bis zum MSA

Autoren: Stephanie Richter & Knut Voigt

Stephanie Richter & Knut Voigt:
Fit in Mathe bis zum MSA
Fant Verlag, Vöhringen, 2016

Cover: Originalbild: © drubig-photo – www.fotolia.de

ISBN 978-3-943710-65-6

© Doreen Fant Verlag, 2016

ISBN 978-3-943710-65-6

1. Auflage 2016

Alle Rechte vorbehalten. Dieses Werk sowie einzelne Teile desselben sind urheberrechtlich geschützt. Jede Verwendung in anderen als den gesetzlich zugelassenen Fällen ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung des Fant Verlags unzulässig.

Vorwort

Liebe Eltern,

das, was Sie plagt, plagt mich auch. Nur eben von der anderen Seite. Lassen Sie sich erklären, was damit gemeint ist. Als Schüler, Student und auch später, als Wissenschaftler, konnte ich mir nicht vorstellen, dass es Menschen geben könnte, die mit Mathe Probleme haben. Natürlich habe ich Mitschüler abschreiben lassen, aber deshalb noch nicht darüber nachgedacht, dass echte Sorgen dahinterstecken könnten. Mein halbes Leben war von Mathematik und Logik erfüllt und die große Welt der Mathe-Sorgen und -Drangsale war mir unbekannt geblieben. Das änderte sich an einem Tag vor etwa 30 Jahren. Ein Freund, schon recht verzweifelt, fragte mich, ob ich seinen Sohn in Mathe „retten“ könnte. Es war kurz vor Ostern und die Mathe-Note sollte sich von einer stabilen „5“ in eine „3“ verwandeln. Sonst wäre es nichts mit der Lehrstelle.

Die Zeit war knapp, das Ziel eher sportlich und ich war kein Lehrer.

Schon die ersten Stunden (Ackern mussten wir zwar!) zeigten deutlich unsere Chance. Alles, was bisher unverständlich geblieben war, ließ sich einfach erklären. „Einfach“ ist natürlich Quatsch; es ließ sich so erklären, dass der Junge es (endlich) verstand UND selber wieder Hoffnung schöpfte. Mathe war also doch keine „schwarze Magie für Eingeweihte“ und den Schulstoff kann jeder bei kleiner Anstrengung (Von nichts kommt natürlich auch hier nichts.) lernen und verstehen, behalten und anwenden.

Diese erste Erfahrung setzte sich in weiteren Fällen fort. Alle Kinder, mit denen ich Mathe geübt hatte – es gab noch mehr Freunde mit ähnlichen Sorgen – verstanden zu wenig von dem, was in der Schule erklärt wurde. Aber oft reichten ein Blick aus einem anderen Winkel und ein paar einfache Überlegungen, um es „Klick“ machen zu lassen. Die Erleuchtung war da, meist schneller als gedacht. Mit der Erleuchtung kehrte das Selbstvertrauen zurück und mit dem Selbstvertrauen die Fähigkeit, auch in Mathe wieder selbständig erfolgreich arbeiten zu können. Mathe wurde damit zu einer vertrauten Beschäftigung und verlor ihren Schrecken. Tests, Klausuren und Prüfungen waren keine Probleme mehr. So soll es sein.

Ihr Kind wird durch das Büchlein kein Mathe-Genie, aber gut mit Mathe klar kommen. Und ganz nebenbei wird Ihr Kind das Lernen lernen und damit die in jedem Fach notwendige Fähigkeit, sich selbständig Wissen anzueignen. Eine Fähigkeit, die auch nach der Schule immer wieder nützlich ist und das ein Leben lang.

Jetzt bin ich schon einige Jahre im Bereich Förderunterricht tätig. An den Schulen hat sich einiges getan, die alten Mathe-Probleme sind leider geblieben und

haben sich kaum verändert.

Als Einzelner kann ich das Schulsystem nicht umstülpen, aber ich kann versuchen, mehr Kinder als bisher von ihren Mathe-Sorgen und Ängsten zu befreien. Zusätzlich geht es auch darum, Ihrem Kind alle Chancen offenzuhalten. Und die meisten Lebenschancen und besten Verdienstmöglichkeiten gibt es für die, die am besten mit den MINT-Fächern klar kommen. **MINT** ist eine Abkürzung für die Begriffe **M**athematik, **I**nformatik, **N**aturwissenschaft, **T**echnik. Lassen Sie uns gemeinsam die Chancen der Kinder erhalten und ihre Sorgen vermindern. Mit diesem Büchlein wird Ihr Kind ohne zusätzliche Nachhilfe eine ausgezeichnete Chance für einen guten MSA (= Mittlerer Schulabschluss) in Mathematik bekommen. Und es ist auch mehr drin. Wir können ja nicht ausschließen, dass Ihr Kind nochmal richtig durchstartet. So wie es auch meine jüngste Tochter erlebt hat. Auch sie mochte die Mathematik nicht von Anfang an, hat aber dann sogar Mathematik an der TU Berlin studiert. Mehr noch: Sie hat als Autorin viel dazu beigetragen, dass dieses Buch entstand. Wenn der Spaß am Fach zurückkommt, ist vieles möglich. Die Grundlagen dafür sind mit dem **MaWeKa** (= Mathematischer Werkzeugkasten) hinreichend vorhanden.

Ihr Knut Voigt

Danksagung

Zuerst möchten wir allen Kindern danken, denen wir Förderunterricht erteilen durften. Ihre zum Teil erstaunlichen Fortschritte waren Bestätigung dafür, auf dem richtigen Weg zu sein. Weiter gebührt der Familie und den Freunden Dank, die uns bestärkten und im Buchprojekt unterstützten.

VORRECHTAU

Inhaltsverzeichnis

1 Zahlen, Vorzeichen, Addition und Subtraktion

2 Multiplikation, Klammern

3 Division und Brüche

3.1 Multiplikation von Brüchen

3.2 Division von Brüchen

3.3 Addition und Subtraktion von Brüchen

3.3.1 Brüche mit gleichem Nenner

3.3.2 Brüche mit verschiedenen Nennern, der Hauptnenner

3.3.3 Stammbrüche, gemischte Zahlen, Dezimalbrüche

3.3.4 Eine richtig schwere Aufgabe

4 Potenzen und Wurzeln

4.1 Multiplikation

4.2 Division

4.3 Negative Exponenten

4.4 Basis und Exponent verschieden

4.5 Potenzieren einer Potenz

4.6 Addition und Klammern

4.7 Zehnerpotenzen

4.8 Wurzeln

5 Gleichungen

5.1 Lineare Gleichungen

5.2 Verhältnismgleichungen

5.2.1 Proportionale Zuordnungen

5.2.2 Prozentrechnung

5.2.3 Zinsen

5.3 Produktgleichungen

5.3.1 Antiproportionale Zuordnung

5.4 Gleichungssysteme

5.5 Ungleichungen

6 Funktionen

6.1 Lineare Funktionen und Geradengleichungen

6.1.1 Parallele Geraden

6.1.2 Geraden, die sich schneiden

6.2 Parabeln und quadratische Gleichungen

6.2.1 Parabeln

6.2.2 Quadratische Gleichungen

- 6.2.2.1 Die Scheitelpunktform und ihre Nullstellen
- 6.2.2.2 Die Normalform mit der p,q-Lösungsformel
- 6.2.2.3 Von der Normalform zur Scheitelpunktform
- 6.2.2.4 Der Satz von Vieta
- 6.2.2.5 Geraden und Parabeln
- 6.3 Hyperbeln

7 Geometrie

- 7.1 Geraden, Halbgeraden (Strahlen), Strecken und Winkel
- 7.2 Flächen (Figuren in der Ebene)
 - 7.2.1 Rechteck
 - 7.2.2 Dreiecke
 - 7.2.3 Trapez
 - 7.2.4 Parallelogramm, Drachenviereck und Raute
 - 7.2.5 Die zentrische Streckung
 - 7.2.6 Der Kreis
- 7.3 Winkelmessung
 - 7.3.1 Die Winkelmessung mit der Gradeinteilung
 - 7.3.2 Die Winkelmessung im Bogenmaß
- 7.4 Körper
 - 7.4.1 Der Würfel
 - 7.4.2 Der Quader
 - 7.4.3 Das Prisma (dreiseitig, gerade)
 - 7.4.4 Der Zylinder
 - 7.4.5 Die Pyramide
 - 7.4.6 Der gerade Kreiskegel
 - 7.4.7 Die Kugel

8 Trigonometrie

- 8.1 Der Satz des Pythagoras
- 8.2 Sinus, Kosinus, Tangens
- 8.3 Winkelfunktionen im Einheitskreis
- 8.4 Sinussatz, Kosinussatz und der Pythagoras zum Zweiten

9 Exponentialfunktionen, Wachstum und Zerfall

- 9.1 Exponentialfunktionen
- 9.2 Exponentielles Wachstum
- 9.3 Exponentielle Abnahme (Wertverlust) und Zerfall
- 9.4 Vergleich von exponentiellem und linearem Wachstum (und Zerfall)

10 Stochastik, Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung

- 10.1 Statistik
- 10.2 Wahrscheinlichkeit
 - 10.2.1 Einstufige Zufallsexperimente

10.2.2 Mehrstufige Zufallsexperimente

11 Umrechnung von Größen, zwei Physikformeln

12 Klausur zum MSA

Fachbegriffe

Abbildungsverzeichnis

VORSCHAU

Einführung

Sie kennen das ja aus eigener Erfahrung. Wenn Sie etwas, das nicht funktioniert, ebenso weitermachen, dann funktioniert es genauso wenig. Das ist auch der Grund, warum Mathe-Nachhilfe vielen Kindern außer Zusatzfrust und rausgeworfenem Geld kaum etwas bringt. Nachhilfe ist zu oft verlängerter Unterricht und für Ihre Kinder genauso „spannend“ und erfolglos. Der Ausweg besteht darin, Mathe anders zu zeigen, als es in der Schule geschieht. Schul-Mathe ist keine Wissenschaft. Es ist Handwerk. Ein Handwerk, das jeder lernen kann, der es versteht, bis 10 zu zählen. Unser Ansatz heißt, vom Handwerk zu lernen und Mathe handwerklich darzustellen und zu lehren. Dafür haben wir den **mathematischen Werkzeugkasten**, kurz **MaWeKa**, entwickelt.

Wer einmal gelernt hat, mit einem Hammer umzugehen, kann danach jeden Nagel einschlagen. Wer einmal gelernt hat, eine Waschmaschine zu bedienen, kann jede Wäsche waschen. Wer ein Auto richtig fahren kann, kann jedes Auto fahren. In der Mathematik ist es nicht anders. Wer die mathematischen Werkzeuge handhaben kann, wird jede Aufgabe lösen.

Im **MaWeKa** findet Ihr Kind alles, was es zur Lösung seiner Aufgaben und zum Bestehen der Prüfungen (einschließlich MSA = Mittlerer Schulabschluss) benötigt. Der **MaWeKa** ist so aufgebaut, dass Ihr Kind damit selbständig und ohne zusätzliche Hilfe arbeiten kann. Ihr Kind wird Schritt für Schritt lernen, mit dem **MaWeKa** und den enthaltenen Werkzeugen richtig umzugehen. Und wenn es das erst einmal kann, wird es jede Aufgabe gelassen lösen und jede Prüfung ruhig bestehen.

Wie sollte nun praktisch verfahren werden? Vor dem Lesen werden Stift und Papier bereitgelegt. In den Themen wird prinzipiell ALLES nachgerechnet. Es reicht nicht, etwas nur zu lesen. Beginnen können Sie an beliebiger Stelle; also immer dort, wo „der Schuh drückt“. Bei Problemen mit Gleichungen gehen Sie ins Kapitel „Gleichungen“. Bei Problemen mit Funktionen in das Kapitel „Funktionen“ usw. Das Stichwortverzeichnis (Index) hilft zusätzlich, die richtigen Stellen schnell zu finden. Wenn dort alles klar wird, ist es gut, wenn nicht, dann gehen Sie Schritt für Schritt zurück, bis es klar wird. Es ist also möglich, dass sich bei den Gleichungen oder den Potenzen ein Problem mit der Bruchrechnung offenbart, dann heißt es zurück zur Bruchrechnung, sonst geht es nicht weiter. Es ist sehr wichtig, genau zu lesen und Begriffe und Definitionen exakt zu erfassen. Die Werkzeuge werden systematisch entwickelt. Aus einfachen Werkzeugen entwickeln sich kompliziertere, die dann zusätzlich zur Verfügung stehen.

Nehmen wir eine MSA-Frage als Beispiel: „Gibt es positive Zahlen, die beim Potenzieren kleiner werden?“ Wir schauen in unseren Werkzeugkasten und finden Schritt für Schritt die Antwort.

- Was sind positive Zahlen? Es sind Zahlen, die größer sind als Null.
- Was heißt „Potenzieren“? Eine Zahl mit sich selbst multiplizieren.
- 2 mal 2 ist 4, das wird größer als 2. 1 mal 1 ist 1, das bleibt gleich.

- Was ist mit Zahlen, die kleiner als 1 sind, z. B. $\frac{1}{2}$?

- $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$ ist kleiner als $\frac{1}{2}$.

$\frac{1}{2}$ wird also beim Potenzieren kleiner und ist eine positive Zahl.

- Antwort: Ja, es gibt positive Zahlen, die beim Potenzieren kleiner werden.

Wir arbeiten mit dem vorhandenen Wissen und erweitern es schrittweise. Dabei vergessen wir nie, dass ALLES nachzurechnen ist. Stift und Papier sind IMMER dabei. Oberflächlich wissen heißt nichts wissen. Das Arbeiten an den Grundlagen ist nie verlorene Zeit. Kommt etwas Übung hinzu ist der MSA (Mittlere Schulabschluss) so gut wie geschafft. Und die Grundlagen stehen auch für jede weitere Entwicklung zur Verfügung.

So, jetzt noch mal bis 10 zählen und dann geht es los. (Ab jetzt werden wir Ihr Kind direkt ansprechen und wechseln deshalb zum du.)

Stephanie Richter & Knut Voigt

Kapitel 1

Zahlen, Vorzeichen, Addition und Subtraktion

Auch Zahlen brauchen ein Zuhause. Dieses Zuhause werden wir jetzt schaffen. Als erstes zeichnen wir eine Linie. Und weil sie gerade mit dem Lineal entstanden ist, heißt sie auch „Gerade“.



Abbildung 1.1: (Zahlen-)gerade

Jetzt setzen wir irgendwo einen Punkt und bezeichnen ihn mit 0. (Wo, ist ganz egal. Du triffst immer die Mitte, weil du die Gerade in beide Richtungen beliebig verlängern kannst. Okay, danach wird dich keiner fragen, aber es schadet ja auch nicht, etwas mehr zu wissen, als unbedingt nötig ist.)



Abbildung 1.2: Zahlengerade

Danach zählen wir gemütlich bis 10 und tragen diese Zahlen auf der Geraden auf. Nach der 10 zählen wir einfach weiter und fangen den nächsten **Zehner** an. So kommen wir zur 20, dann zur 30, zur 40, ... und wenn 10 **Zehner** voll sind, haben wir den ersten **Hunderter** erreicht. Über die **Hunderter** kommen wir zu den **Tausendern**, dann zu den **Millionen**, wie du das schon kennst. Es reicht also wirklich aus, bis 10 zählen zu können! Der Rest ist Wiederholung.

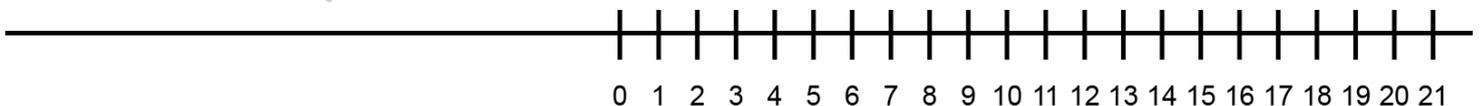


Abbildung 1.3: positive Zahlen

Gut, der Platz hat in der Abbildung nicht ganz gereicht, aber dafür haben wir ja unsere Fantasie, über die Tausend oder Million hinaus bis zur Unendlichkeit uns alles vorzustellen.

Hier haben wir eine Zahl, nämlich die 4, eingetragen. Wir haben sie gefunden, indem wir vom Nullpunkt (oder Anfangspunkt) bis 4 gezählt haben.



Abbildung 1.4: Punkte und Zahlen

Hier sehen wir eine Addition.



Abbildung 1.5: Addition

Die 4 reicht von 0 bis zum Punkt 4 und wir addieren die 3, indem wir einfach ab der 4 weiterzählen. Das ist so, als ob wir im Punkt 4 ein Lineal mit demselben Maßstab anlegen und ab der 4 *drei* weiterzählen. Wir landen bei der 7, wie nicht anders zu erwarten war. Das war nun ein ganz einfaches Beispiel. Dennoch steht es für alle Additionen, egal wie groß oder klein die Zahlen sind. Wie addiert wird, ob mit dem Taschenrechner oder „zu Fuß“, ist dabei ganz egal. Das Prinzip ändert sich nicht. Es wird ganz einfach weitergezählt. Deshalb werde ich dich jetzt auch nicht mit endlosen Aufgabenpäckchen nerven. Das kennst du ja alles noch von der Schule.

Bei der Subtraktion ändert sich dann schon etwas. Wir fangen zwar wieder am Endpunkt der ersten Zahl an, zählen danach aber rückwärts. Deshalb ist es auch nicht egal, was wovon abgezogen wird. Wir müssen also wissen, was der **Minuend** (lateinisch **der zu Verringernde**) und was der **Subtrahend** (**der Abziehende**) ist.

Es gilt: **Minuend – Subtrahend = Differenz.**

Die Abbildung zeigt das einfache Beispiel $12 - 5 = 7$

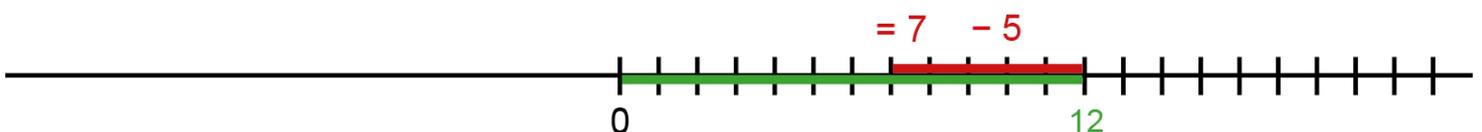


Abbildung 1.6: Subtraktion 1

Wenn der Minuend größer ist als der Subtrahend, bleiben wir im positiven Bereich auf der rechten Seite der Zahlengeraden. Das muss aber nicht immer so sein, wie das nächste Beispiel zeigt.

Zum Lösen der Aufgabe $12 - 15$ müssen wir uns beim Rückwärtszählen auf die andere Seite begeben. Wir erhalten: $12 - 15 = -3$

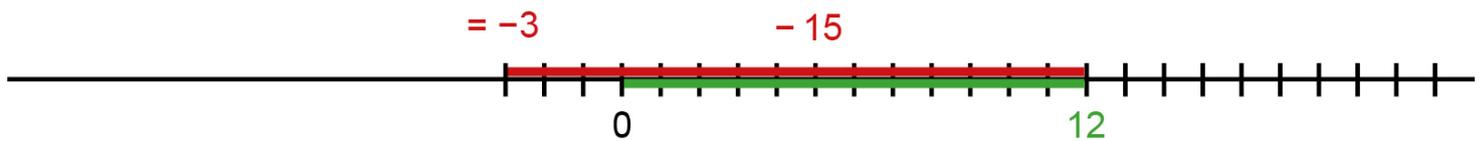


Abbildung 1.7: Subtraktion 2

Die Prinzipien verändern sich dadurch nicht. Beim Addieren zählen wir nach rechts oder vorwärts, beim Subtrahieren nach links oder rückwärts. Dabei können wir auf der linken Seite von der Null landen. Das ist der Bereich der negativen Zahlen. Für jede positive Zahl gibt es auch eine negative. Wir erhalten die negative Zahl durch einfaches „Umklappen“ oder durch das Vorsetzen eines Minuszeichens. Wie das aussieht, zeigt die folgende Abbildung.

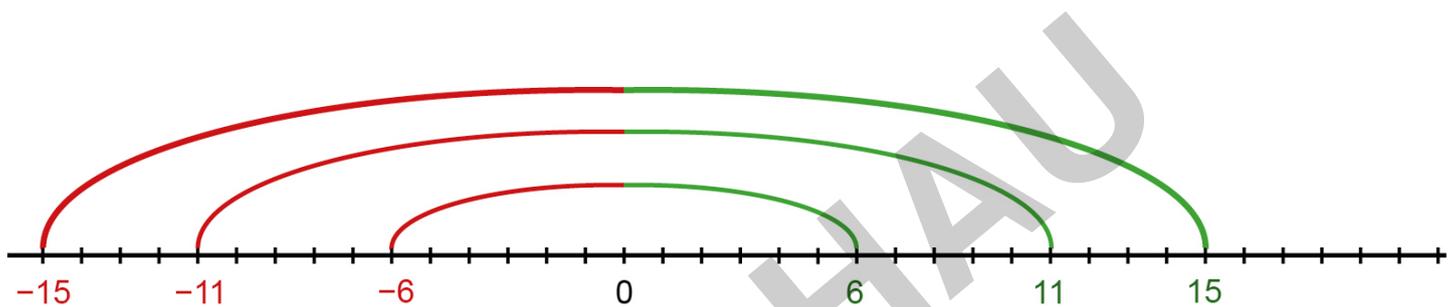


Abbildung 1.8: negative und positive Zahlen

Eine Zahl ist also erst dann vollständig, wenn wir das Zeichen vor der Zahl kennen. Geschrieben wird nur das Minuszeichen. Also -7 heißt **minus sieben** und 7 **plus sieben**. Wenn nichts davor steht, ist die Zahl automatisch positiv. Es ist aber auch nicht falsch $+7$ zu schreiben.

Wenn eine Zahl zweimal umgeklappt wird, ist sie wieder an der alten Stelle. Also $-(-7) = 7$. Der dazu passende Spruch lautet: **Minus mal Minus gibt Plus**. Wir kommen beim Thema **Klammern** nochmal auf die Vorzeichen zurück.

Müssen wir noch mehr zum Thema wissen? Eher nicht.

Was kann geübt werden? Addition und Subtraktion beim Einkaufen. Das geht so: Ware in den Korb, Preis runden ($1,99\text{€}$ sind rund 2€ und $4,12\text{€}$ sind rund 4€), jeden Preis im Kopf addieren und zum Schluss den Wertbon für die Pfandflaschen abziehen. Wenn dann die Kassiererin einen Endpreis nennt, der gerundet unser vorberechneter Preis ist, dann lagen wir mit unserer Rechnung richtig.

Kapitel 2

Multiplikation, Klammern

Nehmen wir uns mal eine ganz einfache Aufgabe vor, sagen wir

$$3 \cdot 4 = 12$$

Sieht aus wie eine Multiplikation, kann aber auch als Addition gerechnet werden.

Die Aufgabe lautet ja, 3 mal die 4 auf der Zahlengerade anzulegen. Mit der ersten 4 komme ich von der 0 zum Punkt 4, zähle dann 4 weiter bis zur 8 und dann nochmal 4 weiter bis zur 12.

Jede Multiplikation ist also eine Addition derselben Zahl und das so oft, wie die Aufgabe es fordert. Wir kommen also auch hier eigentlich mit dem Zählen aus und können so jede Multiplikationsaufgabe in eine mehrfache Addition verwandeln und so lösen. Nur ist es ziemlich mühselig, so zu verfahren. Da lernen wir doch besser das kleine Einmaleins 😊. $7 \cdot 8 = 56$ lernt sich schneller als 7 mal die 8 zu addieren (oder 8 mal die 7). Früher, als es noch keinen Taschenrechner gab (Ja, eine solche Zeit hatten wir mal!), war es sogar sinnvoll, auch das große Einmaleins zu lernen, also $13 \cdot 17$ und alle sonstigen Multiplikationsaufgaben mit den Zahlen zwischen 10 und 20. Für noch größere Zahlen gibt es schriftliche Multiplikationsverfahren. Heute machen wir das alles mit dem Taschenrechner und der liefert dann auch das richtige Ergebnis, wenn wir alles richtig eingetippt haben. Sonst natürlich nicht. Deshalb bleib auch gegenüber dem Taschenrechner immer schön wachsam. Du solltest merken, wenn er dir Blödsinn erzählt (weil du dich vorher vertippst hast). Wie geht das?

Wieder durch das Runden. Ein Beispiel: $19,87 \cdot 11,23$ sind gerundet $20 \cdot 10 = 200$. Wenn der Rechner also 2.231,401 ausspuckt, kann das nicht richtig sein, denn es muss ja rund 200 rauskommen. Das richtige Ergebnis lautet 223,1401 und das ist gerundet 200.

Zurück zum Thema Multiplikation. Allgemein gilt ja die Regel: **Punktrechnung geht vor Strichrechnung**, also

$$5 \cdot 3 + 4 = 15 + 4 = 19$$

Wir haben zuerst 5 mal 3 gerechnet und dann die 4 addiert. Eine Klammer hebt die Regel **Punktrechnung geht vor Strichrechnung** auf. Es muss zuerst das berechnet werden, was in der Klammer ist.

$$5 \cdot (3 + 4) = 5 \cdot 7 = 35$$

Das Ergebnis ist ganz anders. Solltest du keine Lust haben oder es nicht möglich sein, das, was in der Klammer steht, zuerst zusammenzurechnen, dann gibt es einen zweiten Weg:

$$5 \cdot (3 + 4) = 5 \cdot 3 + 5 \cdot 4 = 15 + 20 = 35$$

Das Ergebnis ist dasselbe und muss auch dasselbe sein, denn bei mathematischen Berechnungen darf das Ergebnis nicht vom Rechenweg abhängen. Es ist also egal, ob wir zuerst die Werte in der Klammer zusammenrechnen oder jeden Wert mit dem Faktor vor der Klammer (hier die 5) multiplizieren und danach zusammenrechnen. Natürlich werden wir immer den einfacheren Weg wählen, also zuerst zusammenrechnen und dann multiplizieren. Es gibt aber Fälle wo das so nicht geht, Beispiel:

$$5 \cdot (a + b) = 5a + 5b$$

a und b sind Variablen.

Variablen stehen für irgendwelche Zahlen. Hier kann jede Zahl dahinterstecken. Deshalb können wir nicht sagen, wie groß $a + b$ ist und uns bleibt nur der zweite Weg (wie gezeigt). Der Faktor vor einer Klammer (Der Faktor kann auch dahinter stehen; es gilt: $5 \cdot (a + b) = (a + b) \cdot 5$, weil wir Faktoren vertauschen können.) kann auch negativ sein, z. B. -5 . Dann haben wir eine **umklappende** Wirkung auf die Vorzeichen.

$$-5 \cdot (a + b) = -5a - 5b$$

Im letzten Ausdruck haben wir das Multiplikationszeichen, wie allgemein üblich, weggelassen.

Wir schreiben ab und meinen $a \cdot b$. Oder $5ab = 5 \cdot a \cdot b$.

(Das gilt natürlich nur dann, wenn wir Variablen verwenden. Bei Zahlen müssen wir schon das Multiplikationszeichen „ \cdot “ verwenden, wenn wir multiplizieren, denn 35 bedeutet fünfunddreißig und nicht $3 \cdot 5$!)

Ein „ $-$ “ vor der Klammer kehrt alle Vorzeichen um:

$$-(a - b) = -a + b = b - a$$

Warum? Das „ $-$ “ vor der Klammer ist die Abkürzung für die Multiplikation mit dem Faktor (-1) .

$$-(a - b) = (-1)(a - b) = (-1)a + (-1)(-b) = -a + b$$

Wenn mehrere Klammern auftreten, arbeiten wir von innen nach außen (Es geht auch anders herum, ist aber schwerer). Also nehmen wir uns mal ein Beispiel vor:

$$-3(2a - b(a - b)) = -3(2a - ba + bb) = -6a + 3ab - 3b^2$$

Du hast bemerkt, dass wir die Variablen nach dem Alphabet sortiert haben. Das wird so gemacht, weil es bei vielen Variablen übersichtlicher ist und auch besser aussieht. Rein mathematisch hätten wir das ba auch so stehen lassen können

und es nicht ab schreiben müssen. (Noch etwas zur Schreibweise: $bb = b^2$, diese Vereinfachung nennen wir Potenz und das kommt später nochmal ganz ausführlich bei der Potenzrechnung.)

Klar, es gilt: $ab = ba$.

Wenn viele Klammern gebraucht werden, benutzen wir auch eckige und geschweifte Klammern. Welche Klammer benutzt wird, ist nicht wichtig. Die verschiedenen Klammern werden nur eingeführt, um nicht die Übersicht zu verlieren.

$$- \{-3 [2a - b(a - b)]\} = - \{-3 [2a - ba + b^2]\} = - \{-6a + 3ab - 3b^2\} = 6a - 3ab + 3b^2$$

Wir haben uns wieder von innen nach außen durchgearbeitet.

Klammer mal Klammer, wie z. B.

$$(3a + b) \cdot (2 + c)$$

Hier lassen wir uns nicht dadurch beirren, dass es zwei Klammern sind, denn es sind ja eigentlich nur zwei Faktoren. Also kümmern wir uns nicht weiter darum, dass der erste Faktor eine Klammer ist und multiplizieren die zweite Klammer einfach mit dem ersten Faktor, der selbst eine Klammer ist, aus.

$$(3a + b) \cdot (2 + c) = (3a + b) \cdot 2 + (3a + b) \cdot c$$

Jetzt haben wir wieder jeweils nur eine Klammer mal Faktor und das können wir ausmultiplizieren.

$$(3a + b) \cdot 2 + (3a + b) \cdot c = 2 \cdot 3a + 2b + 3ac + bc = 6a + 2b + 3ac + bc$$

Mit der Methode können wir uns beliebig viele (mehr als drei kommen bis zum MSA nicht vor) Klammern vornehmen und diese ausmultiplizieren. Wir betrachten dabei eine Klammer erst mal wie einen normalen Faktor.

Die binomischen Formeln sind ein Spezialfall der Operation „Klammer mal Klammer“. Es ist sehr sinnvoll, sich diese Formeln zu merken, denn sie werden oft gebraucht.

Die erste binomische Formel

$$(a + b)^2 = (a + b) \cdot (a + b) = (a + b) \cdot a + (a + b) \cdot b = aa + ab + ab + bb = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Die zweite binomische Formel

$$(a - b)^2 = (a - b) \cdot (a - b) = (a - b) \cdot a + (a - b) \cdot b = aa - ab - ab + bb = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Die dritte binomische Formel

$$(a + b) \cdot (a - b) = (a + b) a + (a + b) (-b) = aa + ab - ab - bb = a^2 - b^2$$

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$$

Zum „Auflösen“ oder Ausmultiplizieren von Klammern, wie wir es gerade betrieben haben, gibt es auch das Gegenteil. Wir nennen es Ausklammern (oder Faktorisieren). Hier geht es genau umgedreht: Am Anfang gibt es keine Klammer; am Ende der Prozedur haben wir eine. Dieses Werkzeug setzen wir immer dann ein, wenn eine Summe in ein Produkt umgewandelt werden soll. (Oft können wir Produkte besser gebrauchen als Summen.) Wir nehmen uns mal eine Summe vor, z. B.:

$$ab + ac = a(b + c)$$

Aus der Summe auf der linken Seite wurde ein Produkt auf der rechten Seite. Beide Seiten sind natürlich gleich. Wenn wir die Klammer rechts ausmultiplizieren, bekommen wir wieder die Summe links.

Nochmal ein Beispiel mit Zahlen: $3b + 3c = 3(b + c)$