# Inhaltsverzeichnis


**Vorwort** . . . . . 5

## 1. Problemlösen – Was ist das? . . . . . 7

**1.1 Begriffe** . . . . . 7
1.1.1 „Probleme“ . . . . . 7
1.1.2 „Problemlösen“ . . . . . 8
1.1.3 Heuristik . . . . . 10
1.1.3.1 *Allgemeine, heuristische Prinzipien* . . . . . 11
1.1.3.2 *(Fach-)spezifische Prinzipien* . . . . . 11
1.1.3.3 *Heuristische Strategien* . . . . . 13
1.1.3.4 *Heuristische Hilfsmittel / Medien* . . . . . 14
1.1.4 Strategien . . . . . 15
**1.2 Biologisch-psychologische Grundlagen** . . . . . 15
1.2.1 Neurobiologische / neurodidaktische Erkenntnisse . . . . . 15
1.2.2 Denkstrategien nach Mandl . . . . . 16
1.2.3 Merkmale geistiger Beweglichkeit . . . . . 17
**1.3 Didaktisch-methodische Grundlagen** . . . . . 18
1.3.1 Didaktische Begründungen . . . . . 18
1.3.1.1 *Begründungen aus verschiedenen Perspektiven* . . . . . 18
1.3.1.2 *Problemlösekompetenz als Teil der Bildungsstandards (KMK, 2004)* . . . . . 19
1.3.1.3 *Didaktische Bedeutung des Problemlösens in der Grundschule* . . . . . 20
1.3.2 Methodik . . . . . 21
1.3.2.1 *Vier Stufen des Problemlösens bei Polya* . . . . . 21
1.3.2.2 *Prinzipien prozessorientierten Lernens nach Simons* . . . . . 22
1.3.2.3 *Heuristische Regeln* . . . . . 22
1.3.2.4 *Didaktische Grundsätze für die unterrichtspraktische Umsetzung* . . . . . 23

## 2. Exemplarische Aufgabenanalyse anhand der Überfahrtsaufgabe: Wolf-Ziege-Kohlkopf . . . . . 26

**2.1 Mathematische Analyse (Sachstruktur)** . . . . . 26
**2.2 Analyse des Problemlösepotenzials der Aufgabe** . . . . . 29
2.2.1 Merkmale geistiger Beweglichkeit . . . . . 29
2.2.2 Heuristische Prinzipien . . . . . 29
2.2.3 Heuristische Strategien . . . . . 29
2.2.4 Heuristische Hilfsmittel . . . . . 30
**2.3 Didaktisch-methodische Analyse** . . . . . 31
2.3.1 Aufgabenformulierung . . . . . 31
2.3.2 Fragestellungen und Problemerfassung . . . . . 32
2.3.3 Aufgabenspezifische Aspekte zur Entwicklung / Förderung der Problemlösekompetenz – Auswahl geeigneter heuristischer Verfahren (Prinzipien, Strategien, Hilfsmittel) . . . . . 32
2.3.4 Veranschaulichungen . . . . . 33
2.3.5 Notationsformen . . . . . 33
2.3.6 Reflexionsebenen – Schwerpunkte und Impulse . . . . . 33
2.3.7 Qualitative Differenzierungsmöglichkeiten . . . . . 33
2.3.8 Variationen und Transfermöglichkeiten . . . . . 34
**2.4 Möglichkeiten der unterrichtspraktischen Umsetzung** . . . . . 34
2.4.1 Exemplarische Verlaufsplanung . . . . . 34
2.4.2 Lernziele . . . . . 38
2.4.3 Tafelbildvorlagen . . . . . 38
2.4.4 Arbeitsblätter . . . . . 40



VORSCHAU

netzwerk lernen

zur Vollversion

3. Unterrichtspraktische Beispiele ..... 43

**3.1 Kopf-Füße-Aufgabe:** Schweine und Hühner ..... 48
3.1.1 Mathematische Analyse ..... 48
3.1.2 Didaktisch-methodische Analyse ..... 48
3.1.3 Materialien ..... 51

**3.2 Rangieraufgabe:** Jim Knopf und seine Molly ..... 54
3.2.1 Didaktisch-methodische Analyse ..... 54
3.2.2 Materialien ..... 63

**3.3 Kombinatorikaufgabe:** Fußballdresses ..... 65
3.3.1 Mathematische Analyse ..... 65
3.3.2 Didaktisch-methodische Analyse ..... 66
3.3.3 Materialien ..... 71

**3.4 Mengen- und Maßaufgabe:** Die kleine Schnecke im Brunnen ..... 73
3.4.1 Mathematische Analyse ..... 73
3.4.2 Didaktisch-methodische Analyse ..... 73
3.4.3 Materialien ..... 76

**3.5 Wander- und Abgaben-Aufgabe:** Sieben Tore ..... 78
3.5.1 Mathematische Analyse ..... 78
3.5.2 Didaktisch-methodische Analyse ..... 78
3.5.3 Materialien ..... 83

**3.6 Wenn ..., dann ...-Aufgabe:** Obstkisten ..... 86
3.6.1 Mathematische Analyse ..... 86
3.6.2 Didaktisch-methodische Analyse ..... 87
3.6.3 Materialien ..... 91

**Literaturnachweis** ..... 93

**Im Internet/Aufgabensammlungen** ..... 94

VORSCHAU



netzwerk lernen
zur Vollversion

# 1. Problemlösen – Was ist das?

*„Nichts ist wichtiger, als die Quellen des Erfindens zu sehen, die nach meiner Meinung interessanter sind als die Erfindungen selbst.“*

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) plante, eine „Erfindungskunst“ zu veröffentlichen – zit. n. Polya. 1995. 155.

## 1.1 Begriffe

### 1.1.1 „Probleme“

Was ist eigentlich ein „Problem“ im allgemeinen und im mathematischen Sprachverständnis? Wir sprechen tagtäglich über unterschiedliche Probleme, aber meinen wir dabei dasselbe?

Nach Newell und Simon (1972) spricht man von einem Problem, „wenn zwischen einem unbefriedigenden Ausgangszustand und einem erwünschten Zielzustand eine Barriere steht, die eine neuartige Wissensvermittlung notwendig macht“.

Joerger sieht ein Problem als gegeben, „wenn ein Individuum ein bestimmtes Ziel erreichen will, jedoch nicht weiß, wie es zu diesem Ziel gelangen kann. Das Individuum sieht sich einem Hindernis, einer Barriere, einer Schwierigkeit gegenüber, für deren Überwindung die ihm zur Zeit verfügbaren Mittel und Maßnahmen nicht ausreichen“.

(n. Joerger. 1976.)

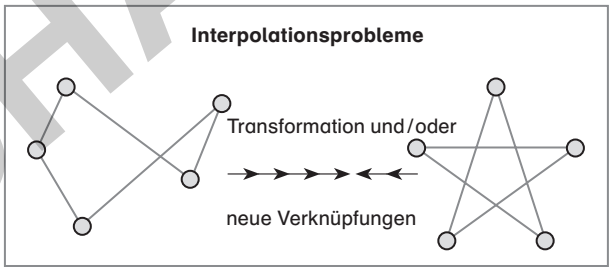
Um es an dieser Stelle schon klar zu formulieren, es geht uns nicht um wirklich existenzielle Probleme, sondern um so etwas wie „kognitive Konflikte“, Verunsicherungen der bisherigen kognitiven Strukturen, die mit den bisherigen Denkmustern, Denkstrategien und Lösungsstrategien nicht auf Anhieb bewältigbar erscheinen.

Aebli (1983. 277–293 in Auszügen) unterscheidet drei große Gruppen von Problemen:

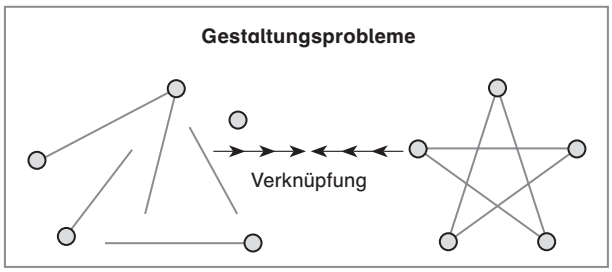
(1) „Probleme, die sich daraus ergeben, dass unser Bild der Wirklichkeit oder unsere Handlungspläne Lücken, unverbundene Stellen aufweisen. – Die „**Probleme mit Lücke**“ … sind dadurch gekennzeichnet, dass unsere Handlungs- und Operationspläne oder unser Bild der Wirklichkeit weiße Flecken aufweisen: Stellen, an denen wir in unserem Tun nicht weiter wissen, Stellen auch, an denen wir nicht sehen, wie Dinge, bei denen wir einen Zusammenhang vermuten, wirklich zusammenhängen.

Probleme mit Lücke können unterteilt werden in *Interpolationsprobleme* und *Gestaltungsprobleme*:

… Bei den *Interpolationsproblemen* sind zwei wohl definierte gedankliche Strukturen gegeben. Wir nennen sie die beiden „Pole” des Problems. In den Beweise-Problemen sind sie besonders deutlich zu sehen: Es sind die beiden Figuren oder die beiden Aussagen, deren Äquivalenz gezeigt werden soll. [Es ist zu zeigen,] … dass die eine Gegebenheit in die andere übergeführt oder transformiert werden soll. …




Probleme der Textherstellung, praktische Vorhaben wie die Herstellung einer Klassenzeitung [ästhetische Gestaltungen; Anm. Verf.] … sind *Gestaltungsprobleme*. Für sie ist es charakteristisch, dass die Ausgangslage relativ unscharf abgegrenzt ist.




(2) Probleme, die daraus entstehen, dass sich unsere Aussagen über die Wirklichkeit oder unsere Handlungsabsichten gegenseitig widersprechen. „**Probleme mit Widerspruch**“ ergeben sich dort, wo zwischen verschiedenen Aussagen über den gleichen Tatbestand eine logische Unvereinbarkeit besteht. (vgl. den klassischen Umgießversuch von Piaget – Invarianz der Menge).

VORSCHAU

Schnabel/Trapp: Problemlösendes Denken im Mathematikunterricht
© Auer Verlag – AAP Lehrerfachverlage GmbH, Donauwörth

netzwerk lernen
zur Vollversion

(3) Probleme, die die Tatsache widerspiegeln, dass unsere Sicht der Wirklichkeit, unsere Handlungen und Handlungspläne unnötig kompliziert sind.“
Die „**Probleme mit unnötiger Komplikation**” sind dadurch gekennzeichnet, dass zu viele Informationen zunächst den Blick auf das Wesentliche, den Kern verstellen. Die Herausforderung besteht nun darin, das Wesentliche, den Kern, die Struktur eines Problems herauszuarbeiten. Dies gelingt aber nur, wenn der Betrachter sein Handlungsziel als Filter bei der Behandlung des Problems konsequent aufrechterhält und damit die Informationen selektiert.

Im Mathematikunterricht der Grundschule finden wir eigentlich alle drei Arten von Problemen nach Aebli. Die meisten Problemlöseaufgaben stellen sog. Probleme mit Lücke dar. Je nach Problemart scheinen sich unterschiedliche Herangehensweisen zum Problemlösen anzubieten. Hier verweisen wir auf die unten genauer beschriebenen heuristischen Strategien.

### 1.1.2 „Problemlösen“

Unter dem Begriff „Problemlösen“ versteht man primär die Tätigkeit eines intelligenten Wesens, für ein auftretendes oder gestelltes Problem – meist durch bewusste Denkprozesse – eine Lösung zu entwickeln und anzuwenden.
„Das Problemlösen ist eine Grundform des Lernens. Es geht davon aus, dass der Schüler eine zu erlernende Struktur, eine Einsicht, einen Begriff, ein Verfahren in seinen groben Zügen schon sieht und versteht, wohin er gelangen möchte, aber im einzelnen noch nicht weiß, wie. Problemlösen heißt, die Idee, das Verfahren im Einzelnen entwickeln. „Entwickeln” ist dabei ein guter Ausdruck: Er sagt, dass die Lösung im Problem in nuce schon enthalten ist, dass sie aber „ausgewickelt” werden muss, wobei sich der Problemgedanke zum Lösungsgedanken entwickelt.“ (Aebli. 1983. 296.)

Für Aebli ist es die Aufgabe der Schüler bzw. stellvertretend des Lehrers, Fragen zu stellen, durch deren Beantwortung der Problemlösungsprozess schrittweise voranschreitet und der Schüler (möglichst selbstständig) schließlich zum Ziel geführt wird.

Mandl betont in seinen Ausführungen die Schwierigkeit der Abgrenzung der Begriffe „Lernen“, „Denken“ und „Problemlösen“. Zwar finden sich in Handwörterbüchern der Psychologie immer Beiträge zu jedem der drei Begriffe, Gemeinsamkeiten und Unterschiede werden jedoch nur selten herausgearbeitet.
Dient Denken der Erreichung eines konkreten Ziels, für welches jedoch noch keine Handlungsroutine vorliegt, so kann dies nach Mandl als Prozess des Problemlösens bezeichnet werden. Dennoch sei zu bedenken, dass Problemlösen häufig auch Bereiche des Lernens und Wissenserwerbs mit einschließt, wenn es beispielsweise darum geht, sich eine ausreichende Wissensbasis anzueignen. „Löst man den Blick vom jeweiligen äußeren Anlaß für Lernen, Denken und Problemlösen, so zeigt sich, daß diese phänotypisch unterschiedlichen Aktivitäten einen großen Überschneidungsbereich aufweisen, wenn man die daran beteiligten kognitiven Prozesse und Strukturen in den Blick nimmt.“ (Friedrich/Mandl. 1992. S. 5f.)

Zum mathematischen Problemlösen gehört, sowohl vorgegebene als auch selbst formulierte Probleme zu bearbeiten, dabei geeignete heuristische Hilfsmittel, Strategien und Prinzipien gezielt auszuwählen und anzuwenden, Lösungsideen zu finden und zu reflektieren, um letztlich die Plausibilität der Ergebnisse zu überprüfen. Nach Bruder (2003) wird eine Aufgabe dann zu einem Problem, wenn sie dem Schüler ungewohnt erscheint und er aufgrund dessen nicht augenblicklich eine erfolgversprechende Lösungsidee zur Verfügung hat. Problemlösen, also das Kennen und Anwenden von Methoden zum Lösen von individuell schwierigen Aufgaben, kann gelernt werden. Ziel hierbei ist es, dass die Schüler mathematische Fragestellungen, sowohl in der Schule als auch im Alltag, erkennen sowie selbst formulieren können. Des Weiteren sollen sie über mathematische Modelle und Vorgehensweisen verfügen, welche ihnen bei der Bearbeitung mathematischer Fragestellungen hilfreich sein können, und diese situationsgerecht einsetzen. Schließlich zielt das Problemlösen im Mathematikunterricht darauf ab, bei den Schülern eine Anstrengungsbereitschaft und Reflexionsfähigkeit für ihr eigenes Handeln aufzubauen. Problemlösefähigkeiten entsprechen Fähigkeiten, welche über die Mathematik als solche hinausgehen. (vgl. Welker. 2009.)

Problemlösen heißt daher nach Bruder (2006, Problemlösen lernen im MU, Vortrag in Schwarzenberg):

- Fragen stellen.
- Probleme, die nicht verstanden werden, können auch nicht gelöst werden.
  → umfassendes Situations- und Problemverständnis (Kern des Problems erfassen)
- Erfolgreiches Problemlösen setzt solides Basiswissen voraus.
- Problemlösen hat eine „experimentelle“ Komponente und erfordert daher „Ausprobieren“.
- Problemlösen heißt: Schwierigkeiten überwinden.

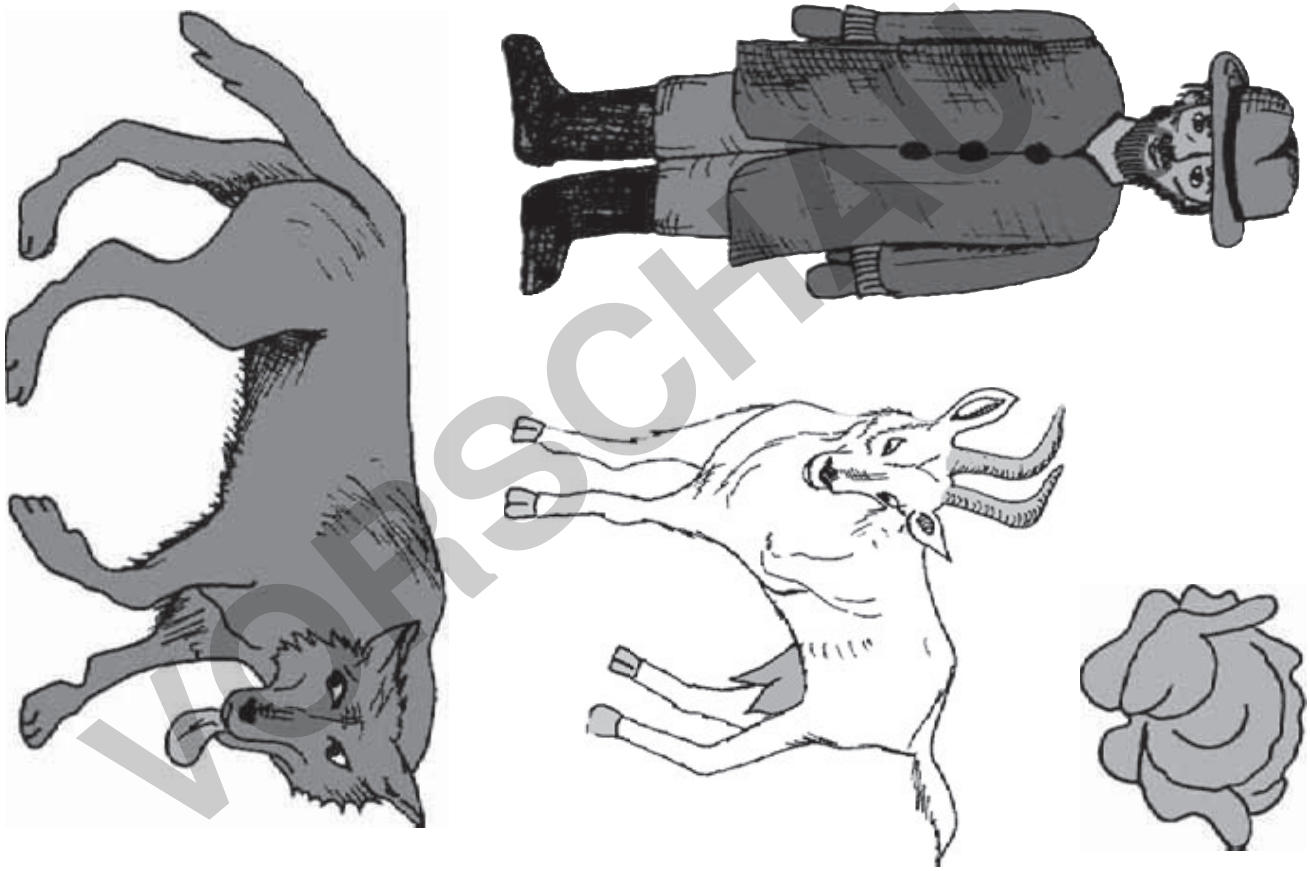
Nach Aebli (a. a. O.) ist „ein Schüler mit einem Problem … ein Schüler, der eine Antwort sucht. Er will etwas tun, um die Antwort zu finden. Wenn wir sie ihm geben, wird er sie bereitwillig aufnehmen.“

VORSCHAU

Schnabel/Trapp: Problemlösendes Denken im Mathematikunterricht
© Auer Verlag – AAP Lehrerfachverlage GmbH, Donauwörth

netzwerk lernen
zur Vollversion

© Auer Verlag – AAP Lehrerfachverlage GmbH, Donauwörth



VORSCHAU



netzwerk lernen
zur Vollversion

| AB | **Wie kommt der Bauer mit seinen drei Sachen über den Fluss? (1)** | Name: _____ | Datum: _____ |
|---|---|---|---|

Notiere deinen Lösungsweg!
Schreibe auf die Pfeile, was du tust!

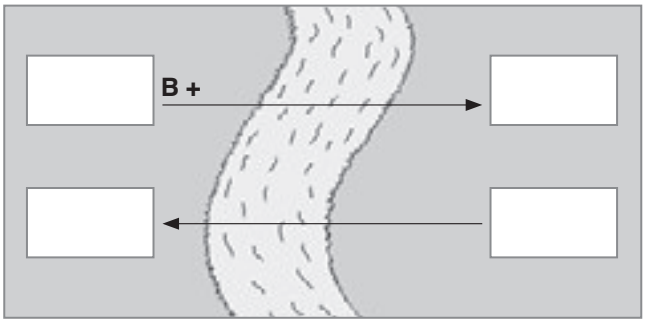
Verwende

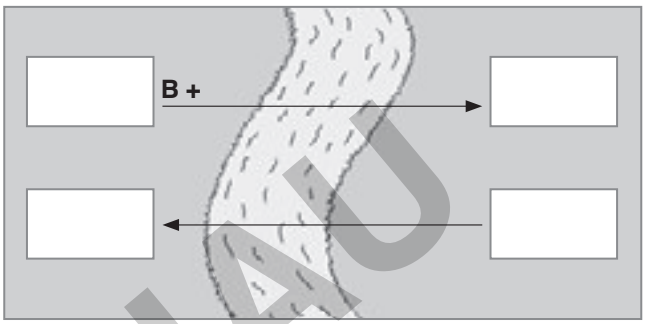
**B** für Bauer

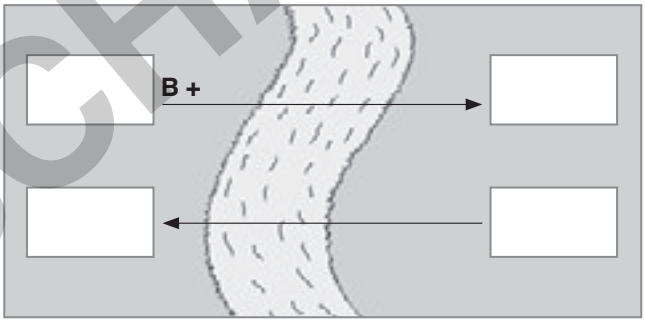
**W** für Wolf

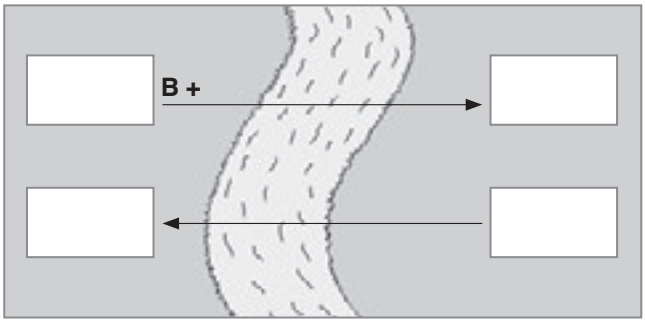
**Z** für Ziege

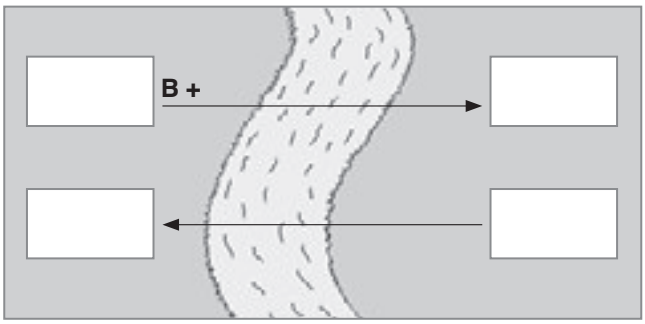
**S** für Salatkopf.



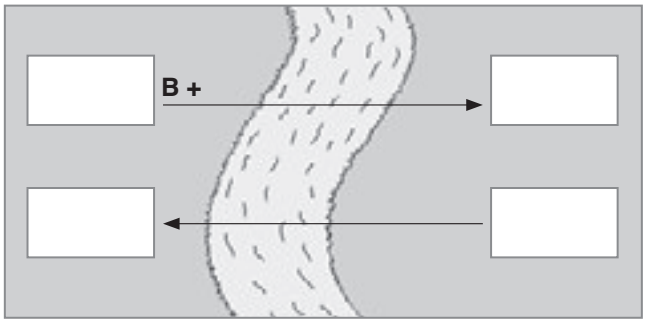



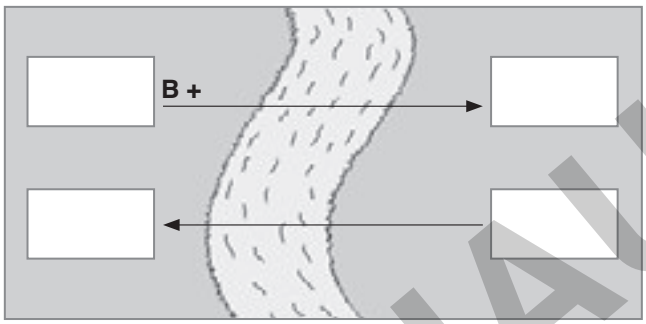

VORSCHAU

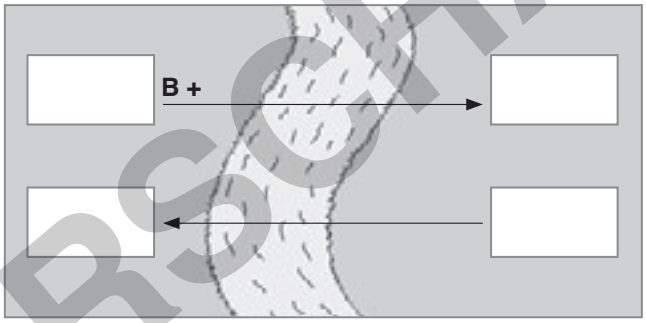
Schnabel / Trapp: Problemlösendes Denken im Mathematikunterricht
© Auer Verlag – AAP Lehrerfachverlage GmbH, Donauwörth

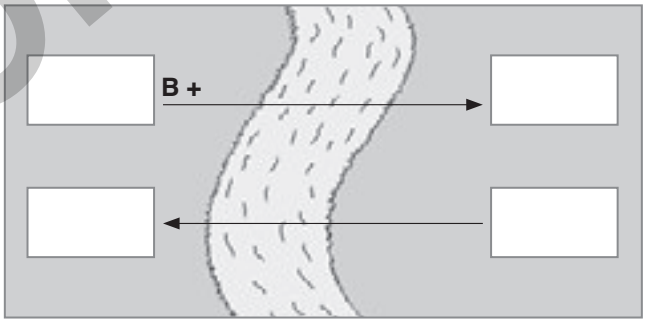
netzwerk lernen
zur Vollversion

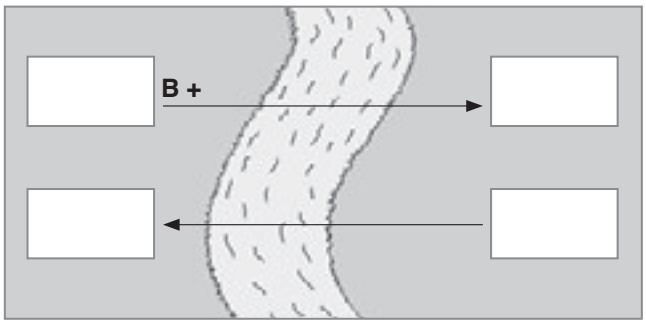
| AB | Wie kommt der Bauer mit seinen drei Sachen über den Fluss? (2) | Name: _____ | Datum: _____ |
|---|---|---|---|




VORSCHAU

Schnabel / Trapp: Problemlösendes Denken im Mathematikunterricht
© Auer Verlag – AAP Lehrerfachverlage GmbH, Donauwörth

netzwerk lernen
zur Vollversion

## 3.3 Kombinatorikaufgabe: Fußballdresses

Eine Fußballmannschaft will sich neu einkleiden. Sie kaufen Stutzen, Fußballhosen und Trikots jeweils in den Farben rot, weiß und schwarz.

Wie viele Möglichkeiten haben sie, die Kleidungsstücke miteinander zu kombinieren, um einen Fußballdress zusammenzustellen?

### 3.3.1 Mathematische Analyse

Aufgaben zur Kombinatorik beschäftigen sich damit, auf welche bzw. auf wie viele Arten Elemente k einer Menge n ausgewählt und angeordnet werden können.

In dem hier dargestellten Beispiel handelt es sich um einen Spezialfall der Kombinatorik, da die ausgewählten Elemente k gleich der Menge n sind: Es stehen nur drei Farben zur Verfügung, von denen auch genau drei ausgewählt werden sollen. Will man diesen Spezialfall meiden, müsste man beispielsweise vier Farben anbieten, aus denen drei ausgesucht werden können, dann wäre k (Elemente der ausgewählten Farben = 3) ungleich n (Menge der vorhandenen Farben = 4).

Grundsätzlich kann man im Bereich der Kombinatorik zwischen verschiedenen Aufgabentypen unterscheiden:

- **Kombinationen** (Auswählen ohne Beachtung der Reihenfolge):
  Jede Kombination der Elemente ist möglich, ohne Berücksichtigung von Reihenfolge.

  Beim gewählten Beispiel **trifft** dies **nicht zu**, denn die Reihenfolge ist bei der Zusammenstellung des Fußballdresses von Bedeutung, d. h. man unterscheidet ausdrücklich zwischen den Möglichkeiten rot – weiß – schwarz und schwarz – weiß – rot, weil die Farben an unterschiedlichen Stellen auftreten (einmal rotes Trikot, beim anderen Mal rote Stutzen). Im Sinne der Kombination wäre dies nur als eine Möglichkeit zu zählen (rws = swr), da hier die Reihenfolge **nicht** von Bedeutung ist.

- **Variationen** (Auswählen mit Beachtung der Reihenfolge) **mit und ohne Wiederholung**:
  Aus einer Menge mit n verschiedenen Elementen werden k Elemente angeordnet.

  **ohne** Wiederholung $V(n;k) = n!\binom{n}{k}$

  Aus der Menge der Farben (n) werden drei Elemente (k) ausgewählt, dabei darf jede Farbe nur einmal verwendet werden – wenn das Trikot rot ist, darf die Farbe nicht wiederholt werden bei Hose oder Stutzen.

  Da es sich, wie bereits erklärt, hier um einen Sonderfall handelt, entfällt $\binom{n}{k}$, da n und k gleich sind: Drei Farben werden aus der Menge der drei Farben gewählt.

  Es bleibt deshalb n! → 3!, also $3 \cdot 2 \cdot 1$ (mathematische Darstellung)
  → In diesem Beispiel entspricht dieser Fall auch der Permutation (siehe unten), da in dieser Aufgabe n gleich k ist!

  **mit** Wiederholung $V(n;k) = n^k$

  Auf das Beispiel der Aufgabensituation bezogen, in der es um das Finden **aller** möglichen Kombinationen für das Fußball-Dress geht:

  Für Trikot, Hose und Stutzen stehen jeweils drei Möglichkeiten, also drei Farben zur Verfügung:
  - Trikot – rot, weiß und schwarz
  - Hose – rot, weiß und schwarz
  - Stutzen – rot, weiß und schwarz

  mathematische Darstellung: $3^3$
  → (entspricht: $3 \cdot 3 \cdot 3$)

  Die Festlegung auf ein bestimmtes Trikot (siehe „Veranschaulichungen“: Tims Trikot soll die Farbe rot haben …) entspricht ebenfalls **einer Variation mit Wiederholung**. Durch die Beschränkung auf **eine** Farbe entfällt einfach die erste Entscheidungsebene (sie ist festgelegt auf ROT) und dadurch reduziert sich die Menge der Möglichkeiten.

  mathematische Darstellung: $3^2$ (entspricht: $3 \cdot 3$)

- **Permutationen** (Anordnungen): Elemente einer Menge aus n verschiedenen Elementen werden in eine bestimmte Reihenfolge gebracht. Die daraus resultierende Fragestellung heißt: Wie viele Möglichkeiten gibt es, die Elemente n einer Menge in verschiedener Reihenfolge anzuordnen? Berechnet werden kann dies mit n! (Fakultät),

  $P(n) = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$, wobei $n \in \mathbb{N} | \{1\}$;

  Im konkreten Beispiel bedeutet dies, für jedes Kleidungsstück des Fußballdresses – Trikot, Hose und Stutzen – muss eine der drei Farben gewählt werden, **dabei darf jede Farbe nur einmal vorkommen** (→ die Anzahl der Möglichkeiten reduziert sich):
  - Für das Trikot wählt man aus drei Farben,
  - für die Hose verbleiben zwei Farben und zuletzt
  - für die Stutzen eine Farbe –

  mathematische Darstellung: **3!** (drei Fakultät), also $3 \cdot 2 \cdot 1$

VORSCHAU

Schnabel / Trapp: Problemlösendes Denken im Mathematikunterricht
© Auer Verlag – AAP Lehrerfachverlage GmbH, Donauwörth

netzwerk lernen
zur Vollversion

**Anmerkung:**

Sowohl bei der Permutation, als auch bei der Kombination können noch die beiden Fälle, *mit und ohne Wiederholung*, unterschieden werden. Da dies für die dargestellten Aufgaben jedoch nicht von Bedeutung ist, wird hier auf eine weiterführende Erläuterung verzichtet.

## 3.3.2 Didaktisch-methodische Analyse

**Aufgabenformulierung**
Variation als Lehrererzählung:

*Tim ist im Fußballverein. In den Farben rot, weiß und schwarz wurden jeweils neue Stutzen, Fußballhosen und Trikots angeschafft. Nun überlegt Tim, wie sie sich im nächsten Spiel anziehen werden: „Rotes Trikot, rote Hose und rote Stutzen … so würden wir aussehen wie die Bayernspieler … hm, vielleicht lieber schwarze Stutzen … oder weiße? … da gibt es aber ziemlich viele Möglichkeiten!"*

*Wie viele Möglichkeiten hat Tim für seinen Fußballdress?*

**Kinder suchen zunächst alle möglichen Kombinationen!**

→ **Einschränkung durch Ergänzung/Weiterführung der Lehrererzählung:**
*Tims Papa erinnert ihn daran, dass im Vereinswappen alle drei Farben vertreten sind: rot, weiß und schwarz.*
*Tim findet nun, das sollte bei seinem Fußballdress auch so sein.*
***Jede** der drei **Vereinsfarben** soll vorkommen – sie haben ja auch genau drei Kleidungsstücke.*

*Welche Möglichkeiten bleiben nun noch übrig?*

**Kinder können nun einige Kombinationsmöglichkeiten streichen! – Es bleiben 6 übrig.**

→ **Einschränkung durch Ergänzung/Weiterführung der Lehrererzählung:**
*Nachdem Tim nachgeschaut hat, in welchen Farben die Vereine aus den Nachbarorten spielen, kann er sich sofort für seinen Fußballdress entscheiden! Schließlich müssen sie bei einem Spiel gut von der gegnerischen Mannschaft zu unterscheiden sein.*
*Neuhaus spielt mit weißen Trikots, blauen Hosen und weißen Stutzen,*
*Altdorf läuft mit schwarzem Trikot und gelben Hosen und Stutzen auf und*
*Kirchstadt hat grüne Trikots, weiße Hosen und schwarze Stutzen.*

*Für welche Möglichkeit entscheidet sich Tim?*

Lösung:

1. Teil der Lehrererzählung:
   Er hat 3 × 3 × 3 = 27 Möglichkeiten für seinen Dress.
   (*siehe Baumdiagramm unter „Veranschaulichungen"*)
2. Teil der Lehrererzählung: Es bleiben 3 × 2 × 1 = 6 Möglichkeiten übrig.
   (*siehe Baumdiagramm unter „Veranschaulichungen"*)
3. Teil der Lehrererzählung: Tim wählt folgende Möglichkeit:
   rotes Trikot, schwarze Hose und weiße Stutzen

Um alle Kombinationsmöglichkeiten durch eine Rechnung finden zu können, müssen die unterschiedlichen Möglichkeiten jeder Menge miteinander multipliziert werden. Der mathematische Begriff dafür heißt „Kreuzprodukt" oder auch „Kartesisches Produkt".
Konkret bedeutet dies:

Menge der Trikots: Es gibt **drei** Möglichkeiten (rot, schwarz, weiß).

Menge der Hosen: Es gibt **drei** Möglichkeiten (rot, schwarz, weiß).

Menge der Stutzen: Es gibt **drei** Möglichkeiten (rot, schwarz, weiß).

→ also 3 × 3 × 3 = 27 Möglichkeiten

Fügt man die Bedingung hinzu, dass jede Farbe nur einmal vorkommen kann, verändert sich das Kartesische Produkt wie folgt:

Das Trikot kann **drei** verschiedene Farben haben, rot, schwarz oder weiß:
**3 ×** …

Die Menge der Hosen ist nun begrenzt. Die Hose darf nicht mehr die gleiche Farbe haben, wie das Trikot, eine Farbe scheidet somit aus, **zwei Farben** stehen zur Verfügung:

3 × **2 ×** …

Die verbleibenden Stutzen müssen **eine** bestimmte Farbe haben, nämlich die, die Trikot und Hose **nicht** haben, das bedeutet eine Farbe bleibt für die Stutzen übrig:

3 × 2 × **1**

Das Kartesische Produkt ergibt in diesem Fall
3 × 2 × 1 = 6;
→ 6 Möglichkeiten für die Wahl des Fußballdresses unter der Bedingung, keine Farbe mehrfach zu nutzen.

VORSCHAU

Schnabel/Trapp: Problemlösendes Denken im Mathematikunterricht
© Auer Verlag – AAP Lehrerfachverlage GmbH, Donauwörth

netzwerk lernen
zur Vollversion

**Fragestellungen und Problemerfassung**
Das aufgabenimmanente Problem wird von den meisten Kindern zumindest **teilweise** rasch erfasst: Tim hat drei verschiedene Kleidungsstücke in je drei verschiedenen Farben. Wie kann er sich anziehen?

Die Aufgabe des Lehrers liegt darin, dafür zu sorgen, dass es nicht nur bei der „**teilweisen**“ Erfassung bleibt. Man ist geneigt, einfarbige Kombinationen (also rotes Trikot, rote Hose, rote Stutzen) von vorneherein auszuschließen. Die Lehrererzählung versucht, dem zwar durch die Überlegungen von Tim entgegenzuwirken, trotzdem erwarten Kinder bei einem Fußball-Dress eine „bunte“ Zusammenstellung, die später ja auch gewählt wird.

In diesem ersten Schritt sollen die Kinder aber zunächst alle Kombinationsmöglichkeiten finden, ohne nach Kriterien und Bedingungen bereits aussortieren zu müssen.

Noch ist keine Begrenzung in der Aufgabe vorgegeben. Auch Wiederholungen der Farben sind zulässig (einfarbig, aber auch z. B. rot – schwarz – rot: rotes Trikot, schwarze Hose, rote Stutzen) und somit unbedingt im Lösungsweg zu beachten.

**Aufgabenspezifische Aspekte zur Entwicklung/ Förderung der Problemlösekompetenz – Auswahl geeigneter heuristischer Verfahren (Prinzipien, Strategien, Hilfsmittel)**
Die meisten Kinder, wie auch Erwachsene, werden bei der Konfrontation mit dieser Aufgabe rasch zum Stift greifen und zu zeichnen beginnen. Mehr oder weniger geordnet und mit mehr oder weniger ausführlichen Überlegungen können viele verschiedene Kombinationsmöglichkeiten dargestellt werden.

Dies entspricht der Strategie des unsystematischen Probierens bzw. des **systematischen Probierens**, welche in Verbindung mit der **Strategie des Vorwärtsarbeitens** angewandt wird.

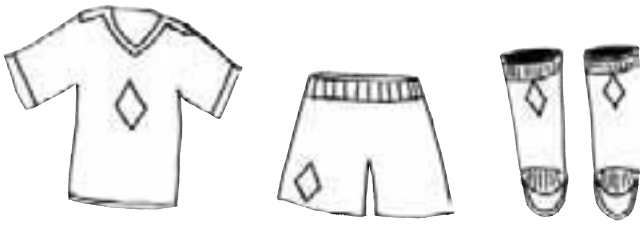
Das Vorwärtsarbeiten gewinnt an Bedeutung, je mehr Bedingungsvariablen hinzugefügt und beachtet werden müssen. Auch bei der Anfangssituation, alle Kombinationen zu finden, müssen Gegebenheiten (die drei Mengen Trikots, Hosen und Stutzen sowie die in Frage kommenden Farben) berücksichtigt werden. Entscheidender werden diese Bedingungsvariablen jedoch bei der weiteren Spezifizierung der Aufgabenstellung. Wenn jede Farbe nur noch einmal im Dress vertreten sein darf bzw. nicht mit den Farbzusammenstellungen der Nachbarorte kollidieren soll, müssen die gefundenen Kombinationen daraufhin überprüft und aussortiert werden.

Mit der Bedingung, jede Farbe nur einmal zu verwenden, fällt schnell auf, dass somit alle einfarbigen Kombinationen ungültig werden und deshalb drei Möglichkeiten (rot – rot – rot, weiß – weiß – weiß, schwarz – schwarz – schwarz) gestrichen werden können. Auch die Kombinationen mit Farbdopplungen (z. B. rot – weiß – rot) entfallen, diese sind jedoch nicht so leicht auf einen Blick zu erfassen.

Als heuristisches Hilfsmittel kommt bei diesem Aufgabentyp dem **Baumdiagramm** große Bedeutung zu. Diese Darstellungsform kann anhand der Problemsituation langsam und schrittweise genutzt und mit den Kindern entwickelt werden (siehe unter „Veranschaulichungen“). Auch die **Skizze** wäre eine Möglichkeit, sich der Lösung des Problems zu nähern. Trikots, Hosen und Stutzen könnten mit verschiedenfarbigen Buntstiften in Umrisszeichnungen festgehalten werden. Kinder neigen jedoch dazu, solche Zeichnungen zu sehr auszudifferenzieren, sodass dies mit hoher Wahrscheinlichkeit ein zeitintensives Vorgehen darstellen würde.

Sind den Kindern ähnliche Aufgaben aus der Kombinatorik bekannt, können die Schüler das Baumdiagramm als Lösungshilfe selbstständig nutzen bzw. können gute Schüler vielleicht nach einiger Übung ausgehend von der Aufgabenstellung sofort die Gleichung, d. h. das Kartesische Produkt bilden und die Aufgabe somit ohne systematisches Probieren und evtl. auch ohne aufwendige zeichnerische Darstellung im Baumdiagramm rein arithmetisch lösen.

**Veranschaulichungen**
Für eine erste Begegnung mit einer kombinatorischen Aufgabe, aber auch für die Unterstützung der schwächeren Schüler, bietet sich eine handelnde Auseinandersetzung mit Bildkarten von Trikots, Hosen und Stutzen an. Diese Bildkarten können die Kinder mit Farbrauten markieren und zu verschiedenen Kombinationen legen. Es genügt hier vollkommen, eine Farbmarkierung zu setzen, da die Kinder sonst zu lange mit unnötigen Ausmalaktionen beschäftigt sind.



Das heuristische Hilfsmittel Baumdiagramm bietet sich, wie bereits erwähnt, besonders an, um alle Möglichkeiten zu erfassen und übersichtlich präsentieren. „Jedes Stockwerk des Baums entspricht einer Entscheidungsstufe und jede Astspitze einer der Möglichkeiten, den Entscheidungsprozess zu durchlaufen. Ein Baumdiagramm gibt demnach gleichzeitig sowohl Prozess (Durchlaufen des Entscheidungsprozesses) als auch Produkte wieder (Kombinationsmöglichkeiten des Fußballdresses).“ (Selter/Spiegel. 2004.)

VORSCHAU

Schnabel/Trapp: Problemlösendes Denken im Mathematikunterricht
© Auer Verlag – AAP Lehrerfachverlage GmbH, Donauwörth

netzwerk lernen
zur Vollversion

# 3.4 Mengen- und Maßaufgabe: Die kleine Schnecke im Brunnen

Eine kleine Schnecke fällt in einen 9 m tiefen Brunnen. Sie kriecht jeden Tag 3 Meter hoch. Jede Nacht rutscht sie jedoch wieder 2 Meter runter.

Wie viele Tage dauert es, bis die kleine Schnecke die Brunnenkante erreicht?

## 3.4.1 Mathematische Analyse

$$
\begin{aligned}
3\text{m}\,(x-1) - 2\text{m}\,(x-1) + 3\text{m} &= 9\text{m} \\
3\text{m}\,(x-1) - 2\text{m}\,(x-1) &= 6\text{m} \\
1\text{m}\,(x-1) &= 6\text{m} \\
(x-1) &= 6 \\
x &= 6+1 \\
x &= 7
\end{aligned}
$$

## 3.4.2 Didaktisch-methodische Analyse

**Aufgabenformulierung**
Variation als Lehrererzählung:

*Eine Schnecke hatte es an diesem Tag ungewöhnlich eilig und weil sie nicht aufpasste, purzelte sie in einen tiefen Brunnen. Zum Glück konnte sie sich rechtzeitig in ihr sicheres Schneckenhaus zurückziehen. Deshalb verletzte sie sich auch nicht, obwohl der Brunnen 9 Meter tief war. Der Boden war weich und feucht, Wasser gab es aber schon lange keines mehr in diesem Brunnen.*
*Trotzdem sah die Sache nicht gut aus für die kleine Schnecke.*
**(Pause – Antizipation der Kinder)**
*„Oh weh, wie komme ich hier bloß wieder raus? Das dauert bestimmt eine Ewigkeit!", jammerte die kleine Schnecke und machte sich stöhnend auf den Weg nach oben. Sie nahm all ihre Kräfte zusammen und schaffte 3 Meter am ersten Tag. Nachts aber war sie so müde und erschöpft, dass sie schlafen musste. An der glitschigen Wand des alten Brunnens rutschte sie wieder 2 Meter nach unten.*

*Jeden Abend, bevor der kleinen Schnecke die Augen zufallen, stellt sie sich eine Frage …*
**(Kinder formulieren Problemfrage:**
**Wie lange dauert es, bis die kleine Schnecke aus dem Brunnen herausgekrochen ist?)**

Lösung:
Die kleine Schnecke braucht **7 Tage**, bis sie oben am Brunnenrand ankommt.
1. Tag mit Nacht: 3 m (Tag) – 2 m (Nacht) = 1 m
2. Tag mit Nacht: 3 m (Tag) – 2 m (Nacht) = 1 m
…
→ 6 Tage benötigt sie für 6 m.
Sie muss aber 9 m schaffen: 9 m – 6 m = 3 m
→ 3 m fehlen noch
7. Tag **ohne** Nacht: 3 m (Tag)
→ 6 Tage (6 m) + 1 Tag (3 m) = 9 m
Am siebten Tag erreicht sie den Brunnenrand.

**Fragestellungen und Problemerfassung**
Neben der Problemfrage helfen zunächst auch kleinere Teilfragen, sich einer Lösung anzunähern:

- Welche Strecke kann die kleine Schnecke an einem Tag zurücklegen?
- Wie viele Meter schafft sie an 2 bzw. 3 Tagen?
- Wie weit ist sie gekommen, bevor ihr am 3. Tag die Augen zufallen?
- An welcher Stelle im Brunnen befindet sie sich am Morgen des 4. Tages?

Einerseits muss der Problemlöser bei dieser Aufgabe die Regelmäßigkeit, das Schema der Berechnung der täglichen Einzelstrecke erfassen (3 m – 2 m = 1 m), andererseits auch die Endlichkeit desselben am 7. Tag erkennen. Am 7. Tag entfällt das Abziehen der „gerutschten" 2 Meter, da die kleine Schnecke bereits angekommen ist. Dies stellt neben dem Finden einer geeigneten Struktur zur Berechnung der Gesamtstrecke wohl den Knackpunkt der Schnecken-Aufgabe dar. Das Zahlenmaterial im Zehnerraum bedeutet für die Kinder der Grundschule hingegen keine Herausforderung, lediglich die Art und Weise der Darstellung.

**Aufgabenspezifische Aspekte zur Entwicklung/Förderung der Problemlösekompetenz – Auswahl geeigneter heuristischer Verfahren (Prinzipien, Strategien, Hilfsmittel)**
Das systematische Probieren ist hier eng verknüpft mit der Strategie des Vorwärtsarbeitens. Man fängt einfach mal an zu rechnen: 3 – 2 = 1 usw.
Beim systematischen Probieren sucht man dann aus einer Rechenreihe beispielsweise bis zum 10. Tag, den Zeitpunkt heraus, an dem der Brunnenrand erreicht wurde.

Das Vorwärtsarbeiten als Strategie setzt eine gründliche Untersuchung der Ausgangssituation voraus.
Eine Betrachtung des Zahlenmaterials lässt rasch erkennen, dass der Streckengewinn pro Tag (Tag als Einheit von Tag + Nacht) einen Meter beträgt. Die Streckenangaben zu Tag und Nacht, die gerade zu Berechnung des Tagespensums noch vereinheitlicht wurden, müssen nun getrennt behandelt werden. Ohne eine

VORSCHAU

Schnabel/Trapp: Problemlösendes Denken im Mathematikunterricht
© Auer Verlag – AAP Lehrerfachverlage GmbH, Donauwörth

netzwerk lernen
zur Vollversion

darauffolgende Nacht im Brunnen legt die Schnecke 3 Meter zurück.

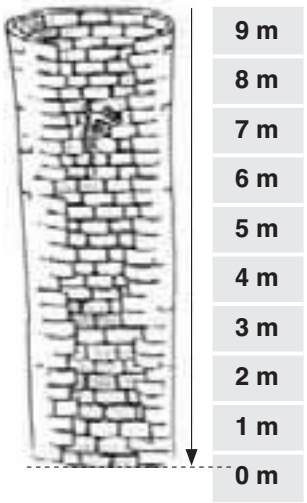
Die Rechnung „9 m – 3 m = 6 m“ lässt also die Schlussfolgerung zu, dass die Schnecke zunächst 6 Tage Zeit benötigt, um dann am nächsten Tag (ohne darauffolgende Nacht) das Ziel von 9 Metern zu erreichen.

9 m – 3 m = 6 m
(Gesamtstrecke, die im Brunnen überwunden werden muss) – (Tagesstrecke ohne nächtl. Streckenverlust)

6 m schafft sie in 6 Tagen,
da sie pro „Tag“ 1 m (= Differenz zwischen Tag und Nachtstrecke) vorankommt.

6 m : 1 m (Differenz Tag/Nacht) = 6 (gesamte Tage mit Nacht)
6 (gesamte Tage mit Nacht) + 1 Tag (für die 3 m Tagesstrecke ohne Nacht)
→ sie braucht 7 Tage – am Abend des 7. Tages kommt sie oben an

**Veranschaulichungen**
Für eine Begegnung mit der Problemsituation bietet sich eine Darstellung des Brunnen mit Markierungen der Höhenangaben sowie die Präsentation des Handlungsträgers in Form der Schnecke an. So kann den Kindern im Kontext der Rahmengeschichte, bildlich die problemimmanente Situation verdeutlicht werden. Neben motivationalen Aspekten spielt hier auch die Loslösung von der abstrakteren, sprachlichen Textebene eine Rolle. Die Kinder möchten der Schnecke gerne helfen, indem sie ihr sagen, wie lange sie für den Weg aus dem Brunnen brauchen wird.
Das Bild der Schnecke im Brunnen veranschaulicht die mathematischen Inhalte. Zweierlei Streckenangaben sind von Bedeutung: 3 m und 2 m. Wie mit diesen Angaben umzugehen und zu rechnen ist, kann dem Schüler anhand der bildlichen Darstellung erfahrbar gemacht werden. Einmal kriecht die Schnecke nach oben, das andere Mal rutscht sie nach unten ab. Die Streckengewinne und -verluste bedeuten gegensätzliche Richtungen.



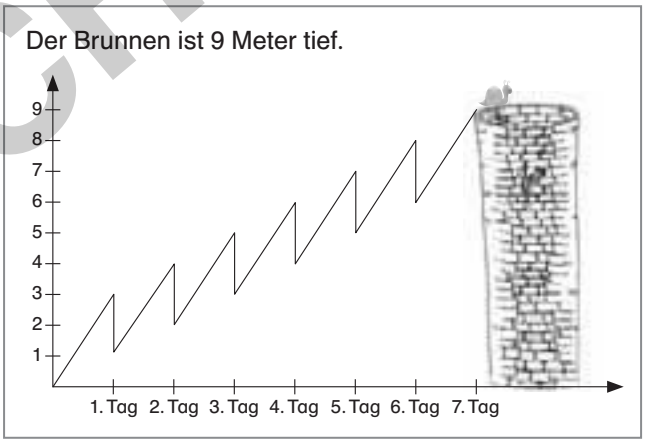

Die Tabelle setzt voraus, dass der Problemkern erfasst wurde. Sie kann dann dazu dienen, eine Übersicht über die zurückgelegten Strecken zu erhalten.

Die entgegengesetzten Richtungen der Strecken lassen sich bei den Angaben in der Nacht am Rechenzeichen ablesen. Zusätzlich können die Teilstrecken der Tagesabschnitte sichtbar gemacht werden.

| | 1. Tag | 2. Tag | 3. Tag | 4. Tag | 5. Tag | 6. Tag | 7. Tag |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Tag | 3 m | 3 m | 3 m | 3 m | 3 m | 3 m | 3 m |
| Nacht | – 2 m | – 2 m | – 2 m | – 2 m | – 2 m | – 2 m | |
| **Gesamt** | **1 m** | **1 m** | **1 m** | **1 m** | **1 m** | **1 m** | |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. Tag | 1 m | | | | | | |
| 2. Tag | 2 m | | | | | | |
| 3. Tag | 3 m | | | | | | |
| 4. Tag | 4 m | | | | | | |
| 5. Tag | 5 m | | | | | | |
| 6. Tag | 6 m | | | | | | |
| 7. Tag | 6 m + 3 m = 9 m | | | | | | |

Die Veranschaulichung mithilfe eines Koordinatensystems eignet sich hervorragend, da hier das Voranschreiten der Schnecke, aber vor allem auch das Abrutschen visualisiert wird. Dieses Hilfsmittel als fachgerechte Darstellungsform der Mathematik (im Sinne eines Lösungsgraphen) kann hier eingeführt werden.




**Notationsformen**
Neben den genannten Veranschaulichungen kann auch eine Folge von Rechnungen, die die Streckenergebnisse der einzelnen Tage und Nächte widerspiegelt, den Lösungsweg zeigen.

1. Tag: 3 m
1. Nacht: 3 m – 2 m = 1 m

2. Tag: 1 m + 3 m = 4 m
2. Nacht: 4 m – 2 m = 2 m

3. Tag: 2 m + 3 m = 5 m
3. Nacht: 5 m – 2 m = 3 m

4. Tag: 3 m + 3 m = 6 m
4. Nacht: 6 m – 2 m = 4 m

5. Tag: 4 m + 3 m = 7 m
5. Nacht: 7 m – 2 m = 5 m

6. Tag: 5 m + 3 m = 8 m
6. Nacht: 8 m – 2 m = 6 m

7. Tag: 6 m + 3 m = 9 m

VORSCHAU

Schnabel/Trapp: Problemlösendes Denken im Mathematikunterricht
© Auer Verlag – AAP Lehrerfachverlage GmbH, Donauwörth

netzwerk lernen
zur Vollversion