Roland Mildner

Mathematisches Knobelmosaik

Denksport für alle

RabenStück Verlag
– Publisher of Social Affairs –

Inhalt

Vorwort

Das Buch wendet sich an alle Menschen, die gern knobeln und raten, die gern mathematische Probleme lösen, die gern Denksport aller Art betreiben und Freude daran finden.

Man kann es auch so ausdrücken: Es wendet sich an alle mathematisch interessierten Nichtmathematiker, Tüftler, Knobler und Rätselfreaks, die einfach Spaß am Lösen kniffliger Probleme haben und mathematische Denkarbeit nicht scheuen.

Insbesondere wendet sich das Buch an mathematisch interessierte Schüler/innen, Leiter/innen mathematischer Arbeitsgemeinschaften und an Mathematiklehrer/innen, denen es eine Vielzahl mathematischer und anderer Knobeleien unterschiedlicher Art bietet; sei es für den Lehrenden zur interessanten Gestaltung und Auflockerung des Unterrichts oder der außerunterrichtlichen Tätigkeit; sei es für den Lernenden zum unterhaltsamen Erwerb oder zur Festigung von mathematischem Wissen und Können.

Dabei denke ich auch an interessierte Naturwissenschaftler/innen, Ingenieure und Studierende dieser Fachrichtungen. Und selbst für Berufs-Mathematiker/innen kann das Buch interessant sein, denn an einigen ‚harten Nüssen' dürften auch sie zu knacken haben.

Das Buch wendet sich somit an alle, ob groß, klein, alt oder jung. Es wendet sich an die ganze Familie, an Singles und auch an die große Zahl der Ruheständler/innen, die durch das Lösen solcher Knobeleien ihr Gehirn bis ins hohe Alter trainieren können.

Das Buch liefert also viele knifflige Möglichkeiten zu einer sinnvollen und geistig vergnüglichen Freizeitgestaltung. Die Beschäftigung mit den mathematischen Problemen und Knobeleien des Buches lohnt sich für jedermann, denn es werden neben mathematischen Fähigkeiten und Fertigkeiten vor allem logisches Denkvermögen, Scharfsinn, Abstraktionsfähigkeit, Kombinationsgabe, Geduld und Ausdauer geschult und auch entwickelt.

Das Buch enthält in 18 Kapiteln eine Auswahl der gelungensten mathematischen Knobeleien und Problemstellungen, die der Autor im Laufe der vergangenen 30 Jahre in Hobbytätigkeit selbst entwickelte und zwar als Autor bzw. Mitautor von einigen Knobelspalten in Tageszeitungen und Zeitschriften. Dabei umfassen diese Kapitel die Gebiete Arithmetik, Zahlentheorie, Algebra, Kombinatorik, Logik, Geometrie, Spiele sowie Rätsel und verschiedene Wortknobeleien. Die ersten 16 Kapitel enthalten jeweils Knobeleien von einem bestimmten Aufgabentypus, der durch die Kapitel-Überschrift deutlich wird, z. B. ‚Knifflige Zahlensuche', ‚Geometrie in der Ebene' oder ‚Domino-Spielereien'. Das 17. Kapitel enthält Knobeleien von unterschiedlichem mathematischem Aufgabentypus, in denen der Leser eine Knobelreise durch Deutschland (Städte und Gebäude, Flüsse, Seen, Gebirge u. a.) unternehmen kann. Im abschließenden Kapitel werden die vom Autor entwickelten ‚Trio-Würfel' vorgestellt. Der sich anschließende Teil des Buches enthält ausführliche Lösungen aller im Buch enthaltenen 244 Aufgaben.

Das Lösen der Knobeleien, die von unterschiedlichem Schwierigkeitsgrad sind, erfordert natürlich ein gewisses mathematisches Grundwissen sowie einige mathematische Fähigkeiten und Fertigkeiten, teilweise aber auch nur gesunden Menschenverstand. Die Schulkenntnisse der Mathematik sind fast immer ausreichend. Einige Aufgaben sind mit einem * gekennzeichnet; das sind besonders ‚harte Nüsse' – gewissermaßen für die ‚Mathe-Genies' unter den Leserinnen und Lesern. Viele der Aufgaben und deren Lösungen sind aufs engste mit Abbildungen verbunden, so dass die Probleme vielfach in anschaulicher Weise zu Tage treten.

Übrigens: Ein solches Buch mit mathematischen Knobeleien sollte nicht wie ein Roman von vorn nach hinten gelesen werden. Hier darf man hin- und herspringen. Jeweils ein einzelnes Problem sollte herausgegriffen, dieses gründlich durchdacht und versucht werden, selbstständig eine Lösung zu finden, bevor man den ausführlichen Lösungsteil als Rettungsring benutzt.

Und nun wünsche ich Ihnen und euch ‚mentale Fitness' beim ‚Denksport für alle' ...

Roland Mildner

1 Zahlen und Rechnen

A 1.1 Von 1 bis 2020

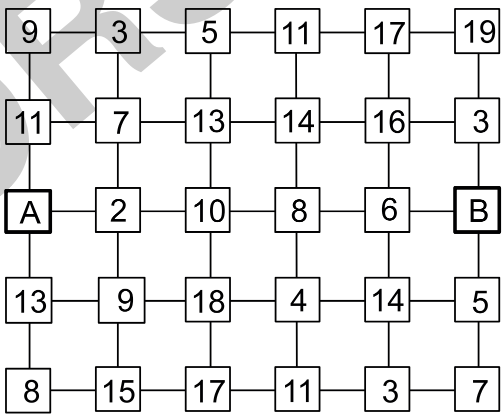
Wenn man alle natürlichen Zahlen von 1 bis 2020 aufschreiben würde, wie oft müsste man dann die Ziffer ‚1' schreiben?

A 1.2 Zahlenvielfalt

Bilden Sie mit den jeweils gegebenen vier Ziffern
a) 1, 2, 3, 4; b) 0, 1, 2, 3 und c) 1, 1, 2, 2
möglichst viele verschiedene vierstellige natürliche Zahlen!

A 1.3 Charakteristische Wege

In der abgebildeten Figur sind Wege von A nach B entlang der Linien zu finden, die nur über Zahlen mit bestimmten Eigenschaften führen. Auf solch einem Weg darf aber jedes Kästchen nur höchstens einmal überquert werden. Finden Sie alle derartigen Wege, die
a) nur über gerade Zahlen,
b) nur über ungerade Zahlen,
c) nur über Primzahlen führen!



A 1.4 Lauter Primzahlen

Ein hochbetagtes und mathematisch interessiertes Ehepaar wird am Tage seiner steinernen Hochzeit nach dem Alter befragt. Scherzhaft spricht der Mann: „Mein Alter erhalten Sie, wenn Sie die kleinste dreistellige und die kleinste vierstellige Primzahl addieren und hiervon die größte dreistellige Primzahl subtrahieren." Seine Frau steht ihm nicht nach und spricht: „Mein Alter erhalten Sie, wenn Sie die kleinste zweistellige, die größte zweistellige und die größte dreistellige Primzahl addieren und hiervon die kleinste vierstellige Primzahl subtrahieren." Wie alt ist jeder der beiden Jubilare?

A 1.5 Vollkommene Zahlen

Schreiben Sie von jeder der drei Zahlen 6, 28 und 496 die echten natürlichen Teiler (einschließlich der 1) auf, und bilden Sie in jedem Falle deren Summe! Was stellt man fest?

(Beispielsweise sind die echten natürlichen Teiler der Zahl 18 die Zahlen 1, 2, 3, 6 und 9, deren Summe 21 beträgt.)

A 1.6 Zahlenfreundschaft

a) Ermitteln Sie alle echten natürlichen Teiler der Zahl 220 und bilden Sie deren Summe! Ermitteln Sie danach alle echten natürlichen Teiler dieser Summe und bilden Sie wieder deren Summe!

b) Führen Sie das unter a) genannte Verfahren jetzt mit der Ausgangszahl 1184 durch!

Was stellen Sie in jedem der beiden Fälle fest?

A 1.7 Zahlen-Anzahl

Wie viele dreistellige natürliche Zahlen gibt es, bei denen die erste und die dritte Grundziffer gleich sind, und deren mittlere Grundziffer jeweils kleiner als diese (erste bzw. dritte) Grundziffer ist?

A 1.8 Glückszahl ‚7'

Wie viele dreistellige natürliche Zahlen gibt es, deren Quersumme 7 beträgt?

A 1.9 Kreuz und quer 1

Tragen Sie in die Leerfelder der abgebildeten Quadratfigur natürliche Zahlen so ein, dass sich in den drei durchgängigen Zeilen und Spalten wahre Gleichungen ergeben. Zur Eintragung dürfen aber nur

a) die Zahlen 1, 2, 3, 4 und 5 sowie

b) die Zahlen 1, 2, 3 und 4 sowie

c) die Zahlen 1, 2 und 3

A 13.11 Tier-Rösselsprung

In jede der sechs dick umrandeten Teilfiguren wurde der Name eines Tieres eingetragen, und zwar im Rösselsprung-Verfahren, d.h. in der Gangart eines Springers beim Schachspiel.

Welche sechs Tiernamen sind es?

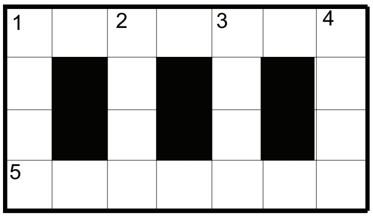
				S	T				
			S	E	A	Z			
			U	Z	G	I			
			R	P	W	M			
		E	Z	H	E	R	N		
		S	N	D	I	T	L		
		I	C	A	N	G	E		
L	B	U	E	E	T	R	A	N	I
R	H	L	N	L	A	A	L	W	S
A	E	O	N	V	T	M	C	W	I
F	E	C	E	A	P	I	E	D	H

A 13.12 Ein Schiller-Zitat

In unser abgewandeltes ‚Schachbrett‘ wurde im Rösselsprung, d.h. in der Gangart eines Springers beim Schachspiel, ein Zitat aus Schillers „Lied von der Glocke“ eingetragen (ohne Satzzeichen und mit einem ‚ß‘ für Doppel-S). Der Rösselsprung beginnt in der untersten Reihe mit dem Buchstaben F. Wie lautet dieses Schiller-Zitat?

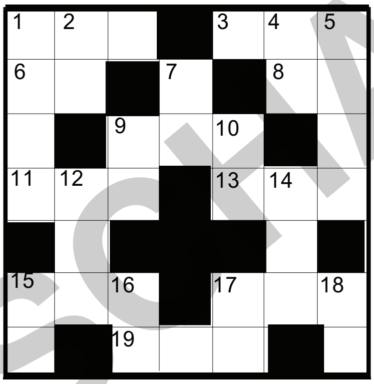
A		E	F	D	I	N	R	T	A	H	S		T
R		M			O			T			N		L
E	U	E	R	E	E	D	S	M	E	U	E	H	N
D		G									A		H
T		E									M		E
R	N	S	N	G	D	I	C	ß	E	M	U	R	G
E		T			O			E			E		T
I		F	L	E	E	R	D	K	U	W	E		B

in die Figur einzutragen ist.



Waagerecht: 1. 7000000 + 300000 + 90000 + 2000 – 600 – 60 – 5, 5. 3000000 + 500000 + 10000 + 4000 – 200 – 60 – 1.
Senkrecht: 1. 10000 – 700 + 20 – 5, 2. 8000 – 700 + 60 – 7, 3. 2000 – 200 + 10 – 1, 4. 4000 – 500 + 40 – 3.

A 14.11 Mathematisches Kreuzformelrätsel



Bei der Eintragung der gesuchten mathematischen Formeln sind Potenzen auszuschreiben (z. B. $r^2 = r \cdot r$), die Reihenfolge von Faktoren ist in geeigneter Weise selbst zu wählen (z. B. $\pi \cdot r^2 = \pi \cdot r \cdot r = r \cdot \pi \cdot r = r \cdot r \cdot \pi$) und Kästchen-Trennstriche sind stets als Multiplikationszeichen (mal) aufzufassen:
Waagerecht: 1. Flächeninhalt eines Kreises (Radius r), 3. Umfang eines Kreises (Radius r), 6. Durchmesser einer Kugel (Radius r) 8. Das Verhältnis der Mantelfläche eines geraden Kreiszylinders (Durchmesser d, Höhe h) zu seiner Höhe h, 9. Mantelfläche eines Würfels (Kantenlänge a), 11. Mantelfläche eines regelmäßigen dreiseitigen Prismas (Grundkante a, Höhe h), 13. Mantelfläche eines regelmäßigen sechsseitigen Prismas (Grundkante a, Höhe h), 15. Mantelfläche einer geraden quadratischen Pyramide (Grundkante a, Seitenflächenhöhe h_S), 17. Oberfläche eines Tetraeders (Kantenlänge a), 19. Volumen eines Quaders (Kantenlängen a, b, c).

1 Zahlen und Rechnen

L 1.1 Von 1 bis 2020

Bei Beachtung des systematischen Aufbaus des Dezimalsystems findet man schnell das Ergebnis: Die Ziffer ‚1‘ muss geschrieben werden bei den Zahlen von 1 bis 99 insgesamt 20 mal (1 bis 9: 1 mal; 10 bis 19: 11 mal; 20 bis 99: 8 mal), bei den Zahlen von 100 bis 999 insgesamt 280 mal (9 · 20 + 100), bei den Zahlen von 1 000 bis 1 999 insgesamt 1 300 mal (20 + 280 + 1 000) und bei den Zahlen von 2 000 bis 2 020 insgesamt 12 mal. Also müsste man die Ziffer ‚1‘ insgesamt 20 + 280 + 1 300 + 12 = 1 612 mal aufschreiben.

L 1.2 Zahlenvielfalt

a) Man kann 24 = 4! verschiedene Zahlen bilden (Anzahl der Permutationen von vier Elementen - ohne Wiederholung):

1234 1243 1324 1342 1423 1432
2134 2143 2314 2341 2413 2431
3124 3142 3214 3241 3412 3421
4123 4132 4213 4231 4312 4321

b) Wie bei a) wären 24 vierstellige Ziffernfolgen theoretisch möglich, doch würden sechs davon mit ‚0‘ beginnen. Also kann man nur 18 solche Zahlen bilden:

1023 1032 1203 1230 1302 1320
2013 2031 2103 2130 2301 2310
3012 3021 3102 3120 3201 3210

c) Man kann nur 6 = 4! / (2!2!) verschiedene Zahlen bilden (Anzahl der Permutationen von vier Elementen – mit Wiederholung):

1122 1212 1221 2211 2121 2112

L 1.3 Charakteristische Wege

a) Es gibt sechs Wege, die nur über gerade Zahlen führen: A-2-10-8-6-B. A-2-10-8-14-16-6-B, A-2-10-18-4-14-6-B, A-2-10-18-4-8-6-B, A-2-10-18-4-8-14-16-6-B, A-2-10-8-4-14-6-B.

b) Es gibt fünf Wege, die nur über ungerade Zahlen führen: A-11-7-13-5-11-17-19-3-B, A-11-7-3-5-11-17-19-3-B, A-11-9-3-5-11-17-19-3-B, A-11-9-3-7-13-5-11-17-19-3-B, A-13-9-15-17-11-3-7-5-B.

c) Es gibt vier Wege, die nur über Primzahlen führen: A-2-7-13-5-11-17-19-3-B, A-2-7-3-5-11-17-19-3-B, A-11-7-13-5-11-17-19-3-B, A-11-7-3-5-11-17-19-3-B.

L 1.4 Lauter Primzahlen

Er ist 113 Jahre (113 = 101+1 009-997) und sie 96 Jahre (96 = 11+97+997-1 009) alt.

L 1.5 Vollkommene Zahlen

Die Zahl 6 hat die echten natürlichen Teiler 1, 2 und 3, und ihre Summe beträgt 6.