Wer findet einen weiteren Lösungsweg? 3.8

Vorüberlegungen

Ziele und Inhalte:

- *Die Schüler erhalten geometrische Aufgaben, die mit ihren Kenntnissen auf mehreren unterschiedlichen Wegen erfolgreich bearbeitet werden können. Sie sind hier nicht damit zufrieden, ein Problem irgendwie gelöst zu haben, sondern werden dabei unterstützt, weitere alternative Lösungswege zu erproben.*
- *Es werden sieben geometrische Aufgaben vorgestellt, zu denen jeweils mehrere Lösungswege angedeutet werden, die Schüler selbstständig ausführen können.*
- *Die Schüler erfahren, dass „Wie* ***muss*** *ich diese mathematische Aufgabe bearbeiten?“ eine unangemessene Frage ist. Möglichst viele Schüler sollten als Antwort auf diese Frage versuchen, die Aufgabe auf mindestens zwei Wegen zu lösen.*

Zentrales Anliegen:

In der Mathematik gibt es zu einem lösbaren Problem im Allgemeinen viele unterschiedliche Lösungswege. Es widerstrebt Menschen in individuell verschiedenem Grade, ein in vertrautem Zusammenhang behandeltes Problem später mit neuem Wissen anzugehen. Mathematisches Können kann aber dadurch **nachhaltig** gefördert werden, dass es Schülern ermöglicht wird, ein Problem mehrmals zu bearbeiten. Mathematik ist weniger ein Lernfach als ein „Tunfach“. Werden mannigfache Lösungswege gefunden, in der Klasse vorgestellt und gemeinsam bewertet, dann kann bei Schülern Freude aufkommen – dann wird in der Tat gelegentlich **Lust an eigenem Denken** erlebt werden. Dies ist das wertvollste Ziel unseres Mathematikunterrichts.

Werden Schüler dazu angehalten, gelegentlich alternative Lösungswege zu überlegen, dann sind natürlich auch alle Umwege nützlich und lobenswert. Einen eingeschlagenen aufwendigen Weg eventuell mühsam zu Ende zu führen, ist unbedingt eine anerkennenswerte Leistung, bei der wertvolles **Durchhaltevermögen** gestärkt wird. Natürlich werden die unterschiedlichen Lösungswege dann der Klasse präsentiert, um bewertet zu werden. Zu Recht ist „Bewerten“ die sechste und damit nicht nur die anspruchsvollste, sondern auch die wertvollste Bloom’sche Kategorie. Vielen Schülern kann deutlich werden, dass es in der Mathematik nicht angemessen ist, ein behandeltes Thema nach der zugehörigen Klassenarbeit als erledigt anzusehen und wie selbstverständlich zu vergessen. Bei den hier vorgestellten unterschiedlichen Lösungswegen werden Grundaussagen benutzt, die eigentlich immer präsent sein sollten.

Lehrkräfte wissen, dass Eltern eher leistungsschwacher Schüler immer wieder fordern, dass nur ein Standardlösungsweg unterrichtet wird: „Mehrere Lösungswege verwirren unsere Schüler. Es ist schwer genug, einen klar vorgezeichneten Lösungsweg nachzuvollziehen. Es sollen nicht alle jungen Menschen Mathematiker werden.“ Diese Aussage mag dann durchaus angemessen sein, wenn von dem Kind eine zentrale Prüfung knapp bestanden werden soll, denn in solchen Prüfungen müssen meist in weitem Umfang einfache Routineaufgaben in knapper Zeit bearbeitet werden. Wird allerdings angestrebt, Schülern im Mathematikunterricht Durchblick und Überblick zu ermöglichen, dann genügt es, wenn in wenigen Unterrichtsstunden vor einer zentralen Prüfung Routineverfahren zielgerichtet zusammengestellt werden. Dabei kommen eher schwache Schüler zu ihrem Recht. Überdies werden viele Schüler mit Selbstvertrauen in Prüfungen gehen, Routineaufgaben rasch und sicher erledigen, genügend Zeit für untypische Fragen gewonnen haben und hervorragende Ergebnisse erzielen. Dass dies so ist, haben wir jahrzehntelang ausnahmslos erleben dürfen.

3.8	Wer findet einen weiteren Lösungsweg?

Vorüberlegungen

Einordnung:

Es werden sieben geometrische Aufgaben vorgestellt, zu denen es jeweils mehrere Lösungswege gibt. Dabei werden jeweils einige, aber gewiss nicht alle Lösungswege angegeben. Am Ende einer Lehreinheit können Schüler nicht nur erleben, dass das soeben Gelernte ihre Möglichkeiten erweitert, Aufgaben erfolgreich zu lösen, sie können auch erfahren, dass zurückliegende einfache geometrische Sachverhalte gelegentlich elegante Wege eröffnen können. Dabei ergeben sich auch Möglichkeiten, über Methoden zu reflektieren. Beispielsweise gelten Überlegungen an ähnlichen Dreiecken als nicht ganz einfach, stehen Winkelfunktionen zur Verfügung, dann können sie gelegentlich durch ein einfaches Verfahren ersetzt werden.

Im Folgenden werden detaillierte Angaben zu den einzelnen Aufgaben geboten. In den Aufgabenstellungen werden jeweils mehrere Lösungswege angedeutet. Die vorgenommene Nummerierung soll keine Wertung beinhalten. Die Lösungen sind so breit dargestellt, dass sie auch für Schüler geeignet sind.

Die einzelnen Beispiele im Überblick:

1. Beispiel: Winkel in Dreiecken
2. Beispiel: Kreistangenten
3. Beispiel: Flächensätze bei rechtwinkligen Dreiecken
4. Beispiel: Liegen drei Punkte auf einer Geraden?
5. Beispiel: Ein Kreis
6. Beispiel: Eine Flächenberechnung
7. Beispiel: Ist das Dreieck gleichschenklig?

Wer findet einen weiteren Lösungsweg?	3.8

Unterrichtsplanung

1. Beispiel: Winkel in Dreiecken

Zuerst wird dazu angeregt, einen aufwendigen Lösungsweg einzuschlagen. Der Satz über Außenwinkel in Dreiecken wird gelegentlich nicht oder nur am Rande behandelt. Der 2. Lösungsweg ist angemessen, wenn dieser Satz nicht parat ist. Er erlaubt eine elegante Lösung. Beim 3. Lösungsweg können die Schüler erfahren, dass vertiefte Kenntnis der Schlüssel dazu sein kann, ein Problem rechnungsarm im Kopf zu lösen. (**Arbeitsblatt 1**, **M1**; **Lösungen** siehe **M2**)

2. Beispiel: Kreistangenten

Es ist angemessen, wenn bei der Konstruktion eines rechten Winkels über einer Strecke vor allem an den Satz von Thales gedacht wird.
Vorgegeben sind ein Kreis und ein Punkt außerhalb des Kreises. Es sollen die Kreistangenten konstruiert werden, die durch den Punkt gehen. Dies ist eine Routineaufgabe, die im Allgemeinen mithilfe eines Thaleskreises erledigt wird. Gerade bei Routineaufgaben mag es besonders reizvoll sein, diese auch auf mehreren unkonventionellen Wegen zu lösen. Benutzt werden gleichschenklige Dreiecke, Drehungen und Kongruenzsätze. (**Arbeitsblatt 2**, **M3**; **Lösungen** siehe **M4 und M5**)

3. Beispiel: Flächensätze bei rechtwinkligen Dreiecken

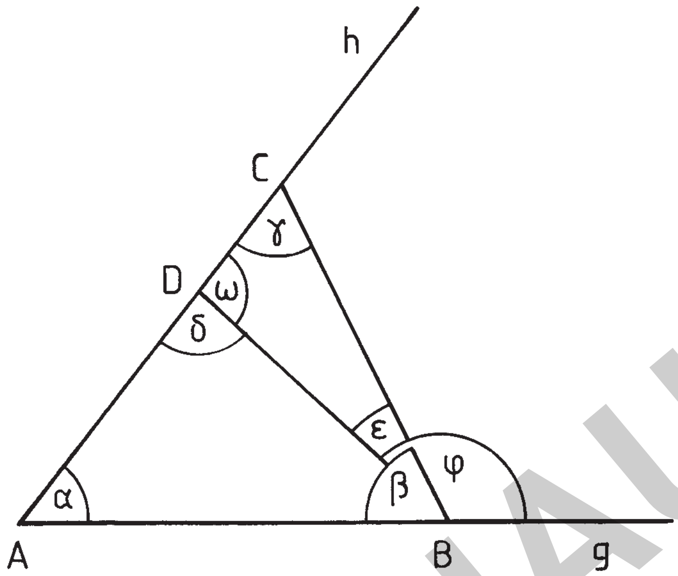
Es ist angemessen, bei Berechnungen an rechtwinkligen Dreiecken zuerst an den Satz von Pythagoras zu denken.
Steht nur der Satz von Pythagoras zur Verfügung, dann sind hier umfangreiche Rechnungen erforderlich. Können neben dem Satz von Pythagoras auch der Kathetensatz und der Höhensatz herangezogen werden, vereinfacht dies die Rechnung deutlich.
Bei den Flächensätzen an rechtwinkligen Dreiecken ist es sinnvoll, zum Satz von Pythagoras, dem Kathetensatz und dem Höhensatz auch die Aussage über den doppelten Flächeninhalt des rechtwinkligen Dreiecks im Auge zu behalten. Dann kann die vorliegende Aufgabe mit einer Kopfrechnung erledigt werden. Die gleiche Formel kann mithilfe des 3. Ähnlichkeitssatzes gewonnen werden. Die dabei erforderlichen Betrachtungen sind für Lernende erfahrungsgemäß nicht ganz einfach nachvollziehbar. Die erforderlichen Überlegungen können durch den angenehmen Einsatz von Winkelfunktionen deutlich erleichtert werden. (**Arbeitsblatt 3**, **M6**; **Lösungen** siehe **M7 und M8**)

4. Beispiel: Liegen drei Punkte auf einer Geraden?

Es gibt mehrere Eigenschaften, die jeweils dafür hinreichend sind, dass drei Punkte auf einer gemeinsamen Geraden liegen. Werden Streckenlängen herangezogen, dann kann das Problem mithilfe des Satzes von Pythagoras gelöst werden. Allerdings ist die dabei erforderliche Rechnung für Schüler keinesfalls trivial. Wird der Tangens benutzt, mag die erforderliche algebraische Umformung als Routineumformung angesehen werden. Dies wird noch deutlicher, wenn die Gleichung einer Ursprungsgeraden herangezogen werden kann.
Werden Winkel zur Kennzeichnung benutzt und erinnern sich Schüler an elementare geometrische Aussagen, dann sind die Lösungswege angenehm einfach. (**Arbeitsblatt 4**, **M9**; **Lösungen** siehe **M10 und M11**)

3.8	Wer findet einen weiteren Lösungsweg?
M2	Lösungen zu Arbeitsblatt 1

Winkel in Dreiecken



Zum 1. Lösungsweg:
Bezeichnungen: $\sphericalangle$ BAC $= \alpha$; $\sphericalangle$ CBA $= \beta$; $\sphericalangle$ ACB $= \gamma$; $\sphericalangle$ CBD $= \varepsilon$; $\sphericalangle$ BDC $= \omega$
<u>1. Schritt:</u>
Nach Konstruktion ist das ΔABC gleichschenklig mit $\overline{AB} = \overline{AC}$. Dann ist $\beta = \gamma$.
Der Satz über die Winkelsumme im ΔABC bringt danach $2\gamma + \alpha = 180°$.
Es ergibt sich $\gamma = 64°$. Wir wissen auch $\beta = 64°$.
<u>2. Schritt:</u>
Zum gestreckten Winkel mit dem Scheitel B gibt es teilweise sich überdeckende Teilwinkel.
Aus $\beta + \varphi - \varepsilon = 180°$ ergibt sich $\varepsilon = \beta + \varphi - 180° = 21°$.
<u>3. Schritt:</u>
Im ΔBCD gilt nach dem Satz von der Winkelsumme: $\omega = 180° - \gamma - \varepsilon = 95°$.
<u>4. Schritt:</u>
Der Winkel der Größe ω ist Nebenwinkel des gesuchten Winkels. Daher gilt:
$\delta = 180° - 95° = 85°$.

Zum 2. Lösungsweg:
Bezeichnung: $\sphericalangle$ DBA $= \eta$
Zum gestreckten Winkel mit dem Scheitel B gibt es sich teilweise überdeckende Teilwinkel der Größen η und φ. Daher gilt: $\eta = 180° - \varphi = 43°$.
Nach dem Satz von der Winkelsumme gilt im ΔABD: $\delta + \alpha + \eta = 180°$.
Es folgt: $\delta = 180° - 52° - 43° = 85°$.

Zum 3. Lösungsweg:
Im ΔABD ist φ Außenwinkel. Nach dem Satz über Außenwinkel gilt: $\delta + \alpha = \varphi$.
Dies bringt: $\delta = \varphi - \alpha = 137° - 52° = 85°$.

Wer findet einen weiteren Lösungsweg?	3.8
Arbeitsblatt 2	M3

Kreistangenten

Zeichne einen Kreis mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r. Markiere einen Punkt P, der außerhalb des Kreises liegt. Es sollen die Kreistangenten konstruiert werden, die durch den Punkt P gehen.

Vorbereitung:
Zeichne eine Planfigur. Dabei können fragliche Tangenten ohne Konstruktion mithilfe eines Geodreiecks „frei Auge" gezeichnet werden.

Vorüberlegung:
Welche Eigenschaft einer Kreistangente kann für die geforderte Konstruktion besonders geeignet sein?

Im Folgenden werden einige Lösungswege angedeutet.

1. Lösungsweg:
Betrachte die Kreise, die durch den Kreismittelpunkt M und den Punkt P gehen.

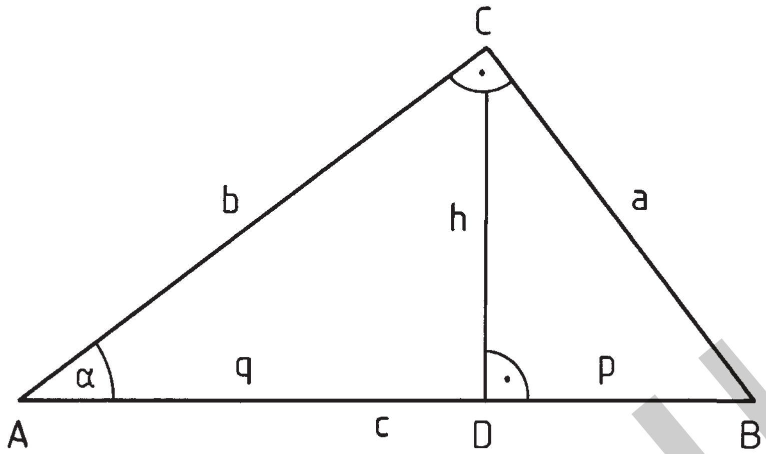
2. Lösungsweg:
Es kann auch ein geeigneter Kreis mit dem Mittelpunkt M, der nicht durch P geht, zur Konstruktion herangezogen werden.

3. Lösungsweg:
Mithilfe des Geodreiecks ist es möglich, an jeden Punkt des Kreises die Kreistangente zu legen. Was ist damit erreicht? Was geschieht, wenn ein Kreis einer Drehung um seinen Mittelpunkt unterworfen wird?

4. Lösungsweg:
Der vierte Lösungsweg hat einen interessanten Ansatz. Allerdings erlauben es Kongruenzsätze, dort angedeutete Drehungen nicht im Einzelnen durchzuführen. Beschreibe diese Überlegungen und führe eine entsprechende Konstruktion durch.

Wer findet einen weiteren Lösungsweg?	3.8
Lösungen zu Arbeitsblatt 3 (1)	M7

Flächensätze bei rechtwinkligen Dreiecken



Zum 1. Lösungsweg:
Da wir bei der folgenden Rechnung die Einheit weglassen, müssen alle Längen in der gleichen Einheit angegeben werden. Wir wählen die Längeneinheit cm.

Im rechtwinkligen $\Delta\,ABC$ gilt nach dem Satz von Pythagoras: $c^2 = a^2 + b^2$.
Es ergibt sich $c = 10{,}0$ cm.

Im rechtwinkligen $\Delta\,CDB$ gilt nach dem Satz von Pythagoras:
$h^2 + p^2 = 36$ (1)

Im rechtwinkligen $\Delta\,ADC$ gilt nach dem Satz von Pythagoras:
$h^2 + (10 - p)^2 = 64$ (2)

(1) und (2) sind Gleichungen für p und h.
In einem ersten Schritt wird die Variable h eliminiert.
Aus (1) ergibt sich $h^2 = 36 - p^2$. (3)
(3) in (2) eingesetzt: $36 - p^2 + (100 - 20p + p^2) = 64$
$20\,p = 72$
$p = 3{,}6$
In (3) eingesetzt: $h^2 = 36 - 12{,}96 = 23{,}04$
$h = 4{,}8$
Ergebnis: $h = 4{,}8$ cm

Zum 2. Lösungsweg:
Im rechtwinkligen $\Delta\,ABC$ gilt nach dem Satz von Pythagoras: $c^2 = a^2 + b^2$.
Es ergibt sich $c = 10{,}0$ cm.

Im rechtwinkligen $\Delta\,ABC$ gilt nach dem Kathetensatz: $cp = a^2$.
Dann ist $p = a^2 : c = 3{,}6$ cm.

Im rechtwinkligen $\Delta\,CDB$ gilt nach dem Satz von Pythagoras:
$h^2 = a^2 - p^2 = (6^2 - 3{,}6^2)\text{ cm}^2 = 6^2\,(1 - 0{,}6^2)\text{ cm}^2 = 6^2 \cdot 0{,}64\text{ cm}^2$
$h = 6 \cdot 0{,}8\text{ cm} = 4{,}8\text{ cm}$

3.8	Wer findet einen weiteren Lösungsweg?
M8	Lösungen zu Arbeitsblatt 3 (2)

Zum 3. Lösungsweg:
Im rechtwinkligen ΔABC gilt nach dem Satz von Pythagoras: $c^2 = a^2 + b^2$.
Es ergibt sich $c = 10{,}0$ cm.

Im rechtwinkligen ΔABC gilt nach dem Kathetensatz: $cp = a^2$.
Hieraus ergibt sich: $p = a^2 : c = 3{,}6$ cm.
Weiter gilt: $q = c - p = 10\text{ cm} - 3{,}6\text{ cm} = 6{,}4$ cm.

Im rechtwinkligen ΔBCA gilt nach dem Höhensatz:
$h^2 = pq = 3{,}6 \cdot 6{,}4\text{ cm}^2 = 36 \cdot 64 \cdot 0{,}01\text{ cm}^2$
Dann ist $h = 6 \cdot 8 \cdot 0{,}1\text{ cm} = 4{,}8$ cm.

Zum 4. Lösungswegsweg:
Der doppelte Flächeninhalt des Dreiecks ABC ergibt sich einerseits zu $2A = ch$.
Da die Katheten zueinander senkrecht sind, kann jede Kathete als zur anderen Kathete gehörende Höhe aufgefasst werden. Dann ergibt sich andererseits $2A = ab$.
Dass das Dreieck nur einen doppelten Flächeninhalt hat, bringt die Gleichung $ch = ab$.
Es folgt: $h = \frac{ab}{c} = \frac{6 \cdot 8}{10}\text{ cm} = 4{,}8$ cm.

Zum 5. Lösungsweg:
Es ist $\sphericalangle ACD = 90° - \alpha = \beta$
und $\sphericalangle ACB = \sphericalangle CDA$.
Nach dem 3. Ähnlichkeitssatz gilt: $\Delta ABC \sim \Delta ACD$.
Dann ist im Besonderen $a : c = h : b$.
Hieraus ergibt sich: $h = \frac{ab}{c} = \frac{6 \cdot 8}{10}\text{ cm} = 4{,}8$ cm.

Zum 6. Lösungswegsweg:
Im rechtwinkligen ΔBCA gilt einerseits: $\sin\alpha = \frac{a}{c}$.
Im rechtwinkligen ΔADC gilt andererseits: $\sin\alpha = \frac{h}{b}$.
Dann ist aber $\frac{a}{c} = \frac{h}{b}$. Es folgt $h = \frac{ab}{c} = \frac{6 \cdot 8}{10}\text{ cm} = 4{,}8$ cm.

Wer findet einen weiteren Lösungsweg?	3.8
Arbeitsblatt 4	M9

Liegen drei Punkte auf einer Geraden?

Vorbereitung:
Zeichne ein Quadrat ABCD mit der Seitenlänge 5,0 cm.
Konstruiere das gleichseitige Dreieck DPC, dessen Ecke P im Inneren des Quadrates liegt. Konstruiere das gleichseitige Dreieck BQC, dessen Ecke Q außerhalb des Quadrates liegt.
Überprüfe an der Zeichnung, ob die Punkte A, P und Q auf einer gemeinsamen Geraden liegen.

Aufgabe:
Wir betrachten die obige Figur mit einem Quadrat der Seitenlänge a.
Entscheide, ob die drei Punkte A, P und Q auf einer gemeinsamen Geraden liegen.

1. Lösungsweg:
Die Punkte A, P und Q liegen dann und nur dann auf einer Geraden, wenn $\overline{AP} + \overline{PQ} = \overline{AQ}$ erfüllt ist.
a) Berechne diese Längen mithilfe eines Taschenrechners. Formuliere dein Ergebnis.
b) Entscheide, ob $\overline{AP} + \overline{PQ} = \overline{AQ}$ erfüllt ist, ohne einen Taschenrechner zu benutzen.

2. Lösungsweg:
Die Punkte A, P und Q liegen dann und nur dann auf einer Geraden, wenn $\sphericalangle BAP$ und $\sphericalangle BAQ$ gleich groß sind.
Diese Winkel können mithilfe von Winkelfunktionen verglichen werden.

3. Lösungsweg:
Wird ein Koordinatensystem eingeführt, dann kann geprüft werden, ob der Punkt Q auf der Verbindungsgeraden von A und P liegt.

4. Lösungsweg:
Die Punkte A, P und Q liegen dann und nur dann auf einer Geraden, wenn $\sphericalangle BAP$ und $\sphericalangle BAQ$ gleich groß sind.
Diese Winkel können auch ohne Winkelfunktionen berechnet werden.

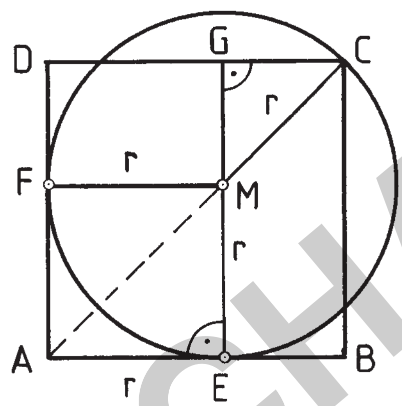
5. Lösungsweg:
Die Punkte A, P und Q liegen dann und nur dann auf einer Geraden, wenn der Winkel APQ ein gestreckter Winkel ist.

Wer findet einen weiteren Lösungsweg?	3.8
Lösungen zu Arbeitsblatt 5 (1)	M13

Ein Kreis

Wir betrachten zwei Halbgeraden mit dem Anfangspunkt A, eine enthält B, die andere D. Kreise, die beide Halbgeraden berühren, haben ihren Mittelpunkt auf der Winkelhalbierenden des von beiden eingeschlossenen rechten Winkels. Zwei dieser Kreise gehen durch C. Der Mittelpunkt des einen liegt im Inneren des Quadrates, der Mittelpunkt des anderen außerhalb.
Weil der Kreis k die Strecken [AB] und [AD] berührt, liegt sein Mittelpunkt M im Inneren des Quadrates auf der Diagonalen [AC].

Zum 1. Lösungsweg:



Es ist $\overline{AE} = \overline{ME} = r$ und $\overline{AM} = \sqrt{2}a - r$.
Im rechtwinkligen Δ AEM bringt der Satz von Pythagoras die Gleichung
$r^2 + r^2 = (\sqrt{2}a - r)^2$ mit der Variablen r.
$r^2 + 2\sqrt{2}\,ar - 2a^2 = 0$
$r_{1,2} = \dfrac{-2\sqrt{2}a \pm 4a}{2}$
Es ist $r_1 = 2a - \sqrt{2}a > 0$.
Es ist $r_2 = -2a + \sqrt{2}a < 0$. Daher kommt r_2 nicht infrage.
Der Kreis hat den Radius $r = 2a - \sqrt{2}a$. Für $a = 4\,\text{cm}$ ergibt sich $r = (8 - 4\sqrt{2})\,\text{cm}$.

<u>Andere Argumentation:</u>
Die Verbindungsgerade von E und M schneidet [CD] in G. Es ist $\overline{GC} = \overline{GM} = a - r$.
Im gleichschenklig rechtwinkligen Δ CGM bringt der Satz von Pythagoras die Gleichung
$2(a - r)^2 = r^2$.
Es ist $a - r > 0$ und $r > 0$. Daher ergibt sich $\sqrt{2}(a - r) = r$. Es folgt:
$(1 + \sqrt{2})r = \sqrt{2}a$
$r = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}\,a = (2 - \sqrt{2})\,a$
Für $a = 4\,\text{cm}$ ergibt sich $r = (8 - 4\sqrt{2})\,\text{cm}$.