Inhalt

		Seite
	Vorwort	4
1	Funktionen beschreiben Wachstumsprozesse	5 - 6
2	Monotonieverhalten von Funktionen	7 - 9
3	Elementare Funktionsuntersuchungen von linearen und quadratischen Funktionen	10 - 12
4	Potenzfunktionen mit natürlichen Exponenten	13 - 14
5	Potenzfunktionen mit negativen ganzzahligen Exponenten	15 - 16
6	Systematisierung von Potenzfunktionen	17 - 21
7	Umkehrfunktionen	22 - 24
8	Wurzelfunktionen	25 - 26
9	Polynomfunktionen	27 - 31
10	Der Differentialquotient zur Bestimmung des Anstieges einer Funktion	32 - 34
11	Wachstumsverhalten von Funktionen und Änderungsrate	35 - 36
12	Die Potenzregel zum Differenzieren von Potenzfunktionen	37
13	Weitere elementare Ableitungsregeln	38 - 40
14	Die Ableitung von Wurzelfunktionen	41
15	Tangenten an Funktionsgraphen	42
16	Was interessiert? – Eigenschaften von Funktionsgraphen	43
17	Monotonieverhalten von Funktionen und erste Ableitung	44 - 45
18	Krümmungsverhalten und zweite Ableitung	46
19	Anwendung des Monotonie- und Krümmungskriteriums beim Zeichnen von Funktionsgraphen	47
20	Verhalten der Ableitungsfunktionen an Extrem- und Wendestellen	48
21	Tangenten, lokale und globale Extrema sowie andere Irrtümer – Ein Quiz	49
22	Notwendige und hinreichende Kriterien für Extrema und Wendepunkte	50 - 51
23	Beispiel für eine vollständige Kurvendiskussion	52 - 53
24	Übungen zur Kurvendiskussion von Potenzfunktionen	54 - 55
25	Teste dich selbst	56
26	Die Lösungen	57 - 83

VORSCHAU

Kurvendiskussion / Potenz- & Wurzelfunktionen - Bestell-Nr. P11 853
KOHL VERLAG

netzwerk lernen
zur Vollversion

Vorwort

Funktionen beschreiben Wachstumsprozesse und Abhängigkeiten von Größen. Die Aufgabe der Mathematik besteht darin, diese Prozesse und Zusammenhänge zu modellieren und mit Hilfe von mathematischen Funktionen zu beschreiben. Solche Beispiele sind das Wachstum von verzinstem Kapital, was sich exakt berechnen lässt, Wachstum oder Abnahme von physikalischen Größen, wie zum Beispiel die Zunahme von Geschwindigkeit und Weg bei einer gleichmäßig beschleunigten Bewegung bei Vernachlässigung der Reibung, der Abfall des Luftdruckes mit zunehmender Höhe sowie das biologische Wachstum von Algen, Bakterienkulturen, welches sich nur annähernd unter Einhaltung bestimmter Bedingungen mathematisch beschreiben lässt.

Mit dieser Aufgabenstellung, Wachstumsprozesse mathematisch zu beschreiben, setzt vorliegendes Material ein. Während das Wachstum von Kapital und biologisches Wachstum mit Hilfe von Exponentialfunktionen beschrieben werden kann, was Inhalt des in Kürze erscheinenden Bandes „Kurvendiskussion / Exponential- & Logarithmusfunktionen“ sein wird, widmet sich dieser Band den Potenz- und Wurzelfunktionen.

Das Weg-Zeit-Gesetz der gleichmäßig beschleunigten Bewegung, welches den Weg als quadratische Funktion der Zeit beschreibt, wird am Beispiel des freien Falls, den der Extremsportler Felix Baumgartner im Jahr 2012 aus 38.969,4 m Höhe zurücklegte, als anschauliches Beispiel für das Wachstum einer physikalischen Größe zur Einführung in die Problematik vorgestellt.

Nach diesen einleitenden Seiten folgen elementare Untersuchungen der Eigenschaften von Potenzfunktionen und Berechnungen ohne Differentialrechnung – geeignet zur Wiederholung und Festigung der Grundlagen zu diesem Funktionstyp. Dabei kommt auch der Betrachtung der Wurzelfunktionen als Umkehrfunktionen von Potenzfunktionen Bedeutung zu.

Die Eigenschaften von Funktionen und ihrer Graphen lassen sich aber – wenn es über quadratische Funktionen hinausgeht – nur mit den Mitteln der Differentialrechnung analysieren und diesem Thema widmet sich dieser Band hauptsächlich.

Obwohl Gymnasiasten der Oberstufe die Techniken des selbstständigen Wissenserwerbs mit Lehrbuch sowie dem Mitschreiben von Tafelbildern und Ausführungen des Lehrers trainieren sollten, um später als Studenten entsprechende Arbeitstechniken zu beherrschen, gibt es doch hin und wieder Gelegenheiten zum Einsatz eines Arbeitsblattes – ob nun ohne größeren Schreib- und Zeitaufwand zur „Erwärmung“ zu Beginn einer Unterrichtsstunde, zum Ausklang der Stunde vor dem Pausenklingeln oder in Vertretungsstunden.

Der Inhalt der Kopiervorlagen beschränkt sich nicht auf Übungen zu Kurvenuntersuchungen. Vielmehr sollen die Aufträge die Schüler auch dazu führen, die Bedeutung des Ableitungsbegriffes als Grenzwert der Änderungsrate einer Größe für einen gegen Null strebenden Zeitraum sowie die Zusammenhänge zwischen Anstieg des Graphen einer Funktion, ihres Monotonie- und Krümmungsverhaltens, und der Existenz von Extrem- und Wendepunkten zu vertiefen. Gerade im Zusammenhang mit der Nutzung des graphikfähigen Taschenrechners (GTR) sollte mit inhaltlichen Betrachtungen von mathematischen Begriffen und Verfahren einem starren Vorgehen nach Formeln und rein mechanischer Benutzung des Taschenrechners entgegengewirkt werden.

Auch in diesem Sinne wünschen wir Schülern und Lehrern Erfolg bei der Arbeit mit dem vorliegendem Material.

Das Kohlverlags-Team und

Barbara Theuer

VORSCHAU

Kurvendiskussion / Potenz- & Wurzelfunktionen - Bestell-Nr. P11 853
KOHL VERLAG

netzwerk lernen
zur Vollversion

1 Funktionen beschreiben Wachstumsprozesse

In der Mathematik bezeichnet Wachstum die Zunahme einer bestimmten Messgröße in Abhängigkeit von der Zeit. Dabei kommt der Mathematik die Aufgabe zu, Wachstumsvorgänge in der Praxis mathematisch zu modellieren und die zeitliche Änderung der Messgrößen mittels Funktionen zu beschreiben. Das Gegenteil von Wachstum ist die Schrumpfung, also die Abnahme einer Messgröße – in einigen Fällen auch als Zerfall bezeichnet.

Aufgabe 1: *Nenne Beispiele für mathematisches Wachstum.*

Der Extremsportler Felix Baumgartner stieg am 14. Oktober 2012 von der Walker Air Force Base bei Roswell, New Mexiko (USA), mit einem Heliumballon in einer Druckkapsel in die Stratosphäre auf, um mit Schutzanzug und Fallschirm aus einer Höhe von 38.969,4 m, wo der Luftdruck nur geringer als 10 hPa ist, abzuspringen. In der Druckkapsel wurde der Druck bis kurz vor dem Ausstieg auf rund 0,55 bar (550 hPa) gehalten, was rund 4900 m Höhe über dem Meeresspiegel entspricht. Das entspricht etwa dem natürlichen Luftdruck auf dem Mont Blanc. Dabei fiel Baumgartner 36.402,6 m frei und erreichte nach dieser zurückgelegten Strecke eine Endgeschwindigkeit von 1357,6 km/h. Erst dann öffnete sich der Fallschirm. (Baumgartners Rekord hatte bis zum 24. Oktober 2014 Bestand, als dieser von Alan Eustace gebrochen wurde, der aus etwa 41.419 m sprang.)

Aufgabe 2: *In den Sachverhalten rund um den Stratosphärensprung Baumgartners spielen Wachstumsvorgänge, welche sich mathematisch beschreiben lassen, eine Rolle. Welche Messgrößen wachsen oder (zer-)fallen hier? Charakterisiere das Wachstum bzw. im weiteren Sinne die funktionalen Zusammenhänge (z. B. exponentiell, linear, quadratisch, Zunahme, Abnahme). Wiederhole dazu auch die Bewegungsgesetze der Physik und die internationale Höhenformel.*

VORSCHAU

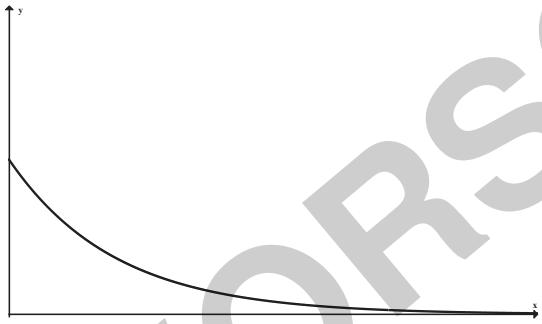
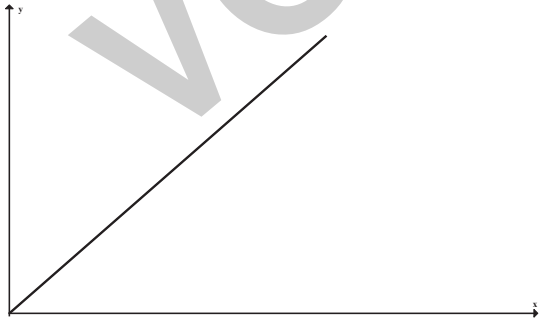
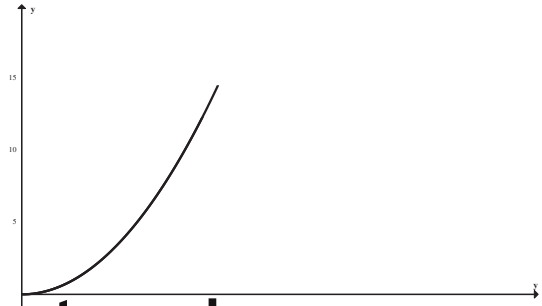
Kurvendiskussion / Potenz- & Wurzelfunktionen - Bestell-Nr. P11 853
KOHL VERLAG

netzwerk lernen
zur Vollversion

1 Funktionen beschreiben Wachstumsprozesse

Um das Wachstumsverhalten einer Messgröße zu veranschaulichen, werden die Messpunkte – eine genügend große Menge vorausgesetzt – in einem Diagramm dargestellt. Da die interessierenden Größen oft nicht kontinuierlich gemessen werden können, ergeben sich nur diskrete Punkte im Diagramm.
Das tatsächliche Verhalten zwischen den diskreten, abgetasteten Werten ist genau genommen nicht bekannt und kann nur bei genügend enger Abtastung angenähert werden, sodass sich zur Veranschaulichung eine explizite, kontinuierliche Wachstumsfunktion B(t) ergibt, die den Messwert w(t) zu einem beliebigen Zeitpunkt t in ihrem Definitionsbereich wiedergibt.
Zu den mathematischen Wachstumsmodellen, welche in der Schulmathematik Eingang finden, gehören unter anderem:
- lineares Wachstum
- potentielles, dabei insbesondere quadratisches Wachstum
- exponentielles Wachstum bzw. exponentieller Zerfall

Aufgabe 3: *Welche Wachstumsprozesse bzw. funktionalen Abhängigkeiten, die im Zusammenhang mit Felix Baumgartners Stratosphärensprung (siehe Seite 5) stehen, lassen sich durch unten angegebene Funktionsgraphen beschreiben? Ordne die Sachverhalte stichpunktartig den in der Tabelle angegebenen Funktionsgraphen zu. Gib möglicherweise auch das entsprechende physikalische Gesetz an. Welche physikalischen Größen entsprechen den Koordinaten x und y?*

Funktionstyp	Beispiel für Wachstum
	
	
	

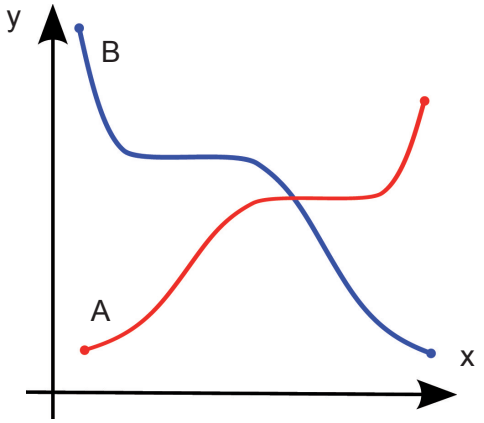
VORSCHAU

Kurvendiskussion / Potenz- & Wurzelfunktionen - Bestell-Nr. P11 853
KOHL VERLAG

netzwerk lernen
zur Vollversion

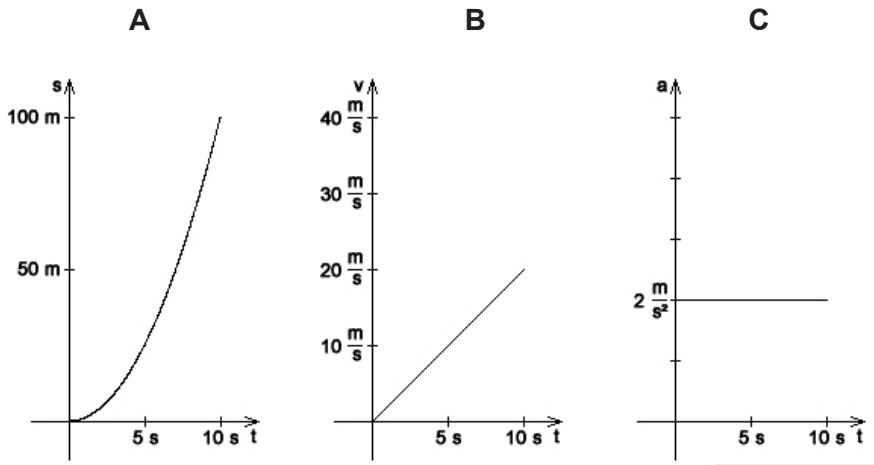
2 Monotonieverhalten von Funktionen

Eine Funktion f(x) ist in einem Intervall **monoton wachsend,** wenn für zwei beliebige x-Werte x_1 und x_2 aus diesem Intervall gilt: Aus: $x_1 < x_2$; $x_1, x_2 \in I \subset R$ folgt: $f(x_1) \leq f(x_2)$. (Siehe Graph A.) Schließt man die Gleichheit aus, handelt es sich um **streng** monotones Wachstum.	Eine Funktion f(x) ist in einem Intervall **monoton fallend,** wenn für zwei beliebige x-Werte x_1 und x_2 aus diesem Intervall gilt: Aus: $x_1 < x_2$; $x_1, x_2 \in I \subset R$ folgt: $f(x_1) \geq f(x_2)$. (Siehe Graph B.) Schließt man die Gleichheit aus, ist die Funktion in diesem Intervall **streng** monoton fallend.



Bei Wachstumsprozessen in der Praxis entspricht w_1 dem Wert der Messgröße zu einem Zeitpunkt t_1 und w_2 dem Messwert zu einem späteren Zeitpunkt t_2.
Ist der zu einem späteren Zeitpunkt gemessene Wert w_2 größer als der Messwert w_1, also $w_2 > w_1$, dann spricht man von positivem Wachstum. Ist der zweite Wert jedoch kleiner als der erste, also $w_2 < w_1$, spricht man von negativem Wachstum bzw. Schrumpfung, Abnahme oder Zerfall. Im Falle $w_2 = w_1$ bezeichnet man den Sachverhalt als Nullwachstum.

Aufgabe 1: *Begründe, dass mit den untenstehenden Diagrammen ein und derselbe Bewegungsablauf beschrieben wird. Welche funktionalen Zusammenhänge bzw. physikalischen Gesetze werden durch die Funktionsgraphen jeweils veranschaulicht? Lies die Messwerte zum Zeitpunkt t = 5 s aus den entsprechenden Graphen ab. Berechne die Messwerte dann exakt. Charakterisiere auch das Monotonieverhalten. Schreibe deine Antworten in die Tabelle auf Seite 8.*



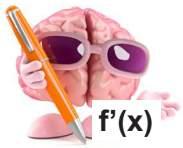
ist doch logisch

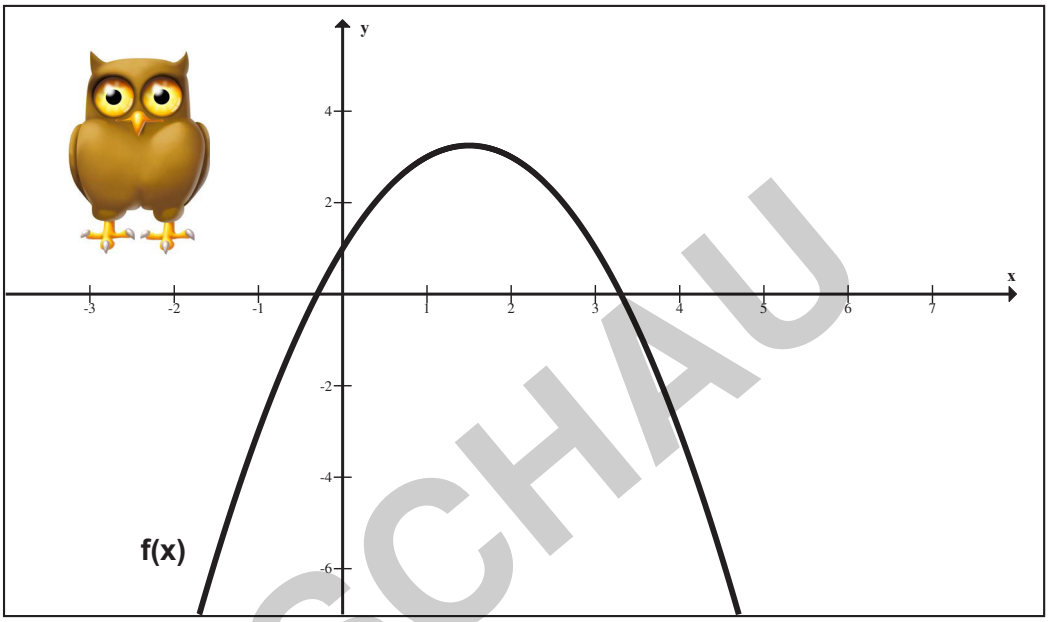
VORSCHAU

netzwerk lernen
zur Vollversion

17 Monotonieverhalten von Funktionen und erste Ableitung

Aufgabe 3: *Im Bild siehst du den Graphen der Funktion $f(x) = -x^2 + 3x + 1$. Zeichne den Graph der Ableitungsfunktion in das gleiche Koordinatensystem. Vergleiche die Nullstelle der Ableitungsfunktion mit der Abszisse des Scheitelpunktes.*





Monotoniekriterium:
Die im Intervall I differenzierbare Funktion f(x) ist in diesem Intervall I
– **(streng) monoton steigend,** wenn für alle $x \in I$ gilt: **$f'(x)$ (>) ≥ 0** bzw.
– **(streng) monoton fallend,** wenn für alle $x \in I$ gilt: **$f'(x)$ (<) ≤ 0.**

Beispiel: Bestimme das Monotonieverhalten der Funktion $f(x) = \frac{1}{3} \cdot x^3 - x$; $x \in R$

Lösung: $f'(x) = x^2 - 1 = 0$; $x1 = -1$ und $x_2 = 1$
An diesen Stellen ändert die Funktion ihr Monotonieverhalten.
Für Teststellen aus den Intervallen gilt: $f'(-2) = 3$; $f'(0) = -1$; $f(2) = 3$
Daraus folgt, dass f(x) im Bereich $-\infty < x \leq -1$ streng monoton steigend,
$-1 \leq x \leq 1$ streng monoton fallend und
$1 \leq x < \infty$ streng monoton steigend ist.

Aufgabe 4: *Welche Aussagen über das Monotonieverhalten der Funktion $f(x) = \frac{1}{4} \cdot x^4 - \frac{1}{3} \cdot x^3 - x^2$ sind zutreffend? Setze „X". Weise deine Entscheidung durch Anwendung des Monotoniekriteriums nach.*

☐ **A** für $-\infty < x \leq 0$ streng monoton steigend; für $0 \leq x \leq 2$ streng monoton fallend; für $2 \leq x < \infty$ streng monoton steigend

☐ **B** für $-\infty < x \leq -1$ streng monoton steigend; für $-1 \leq x \leq 0$ streng monoton fallend; für $0 \leq x \leq 2$ streng monoton steigend; für $2 \leq x < \infty$ streng monoton fallend

☐ **C** für $-\infty < x \leq -1$ streng monoton fallend; für $1 \leq x \leq 0$ streng monoton steigend; für $0 \leq x \leq 2$ streng mono
monoton steigend

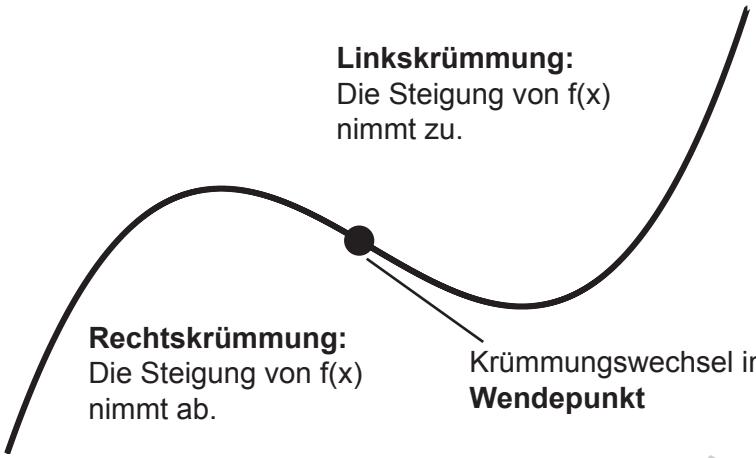
VORSCHAU

netzwerk lernen
zur Vollversion

Kurvendiskussion / Potenz- & Wurzelfunktionen - Bestell-Nr. P11 853
KOHL VERLAG

18 Krümmungsverhalten und zweite Ableitung

Bewegt man sich auf der unten abgebildeten Kurve von links nach rechts, durchfährt man zunächst eine Rechtskurve und dann eine Linkskurve.



Aufgabe 1: *Die Funktion f(x) sei in einem Intervall I differenzierbar. Was folgt daraus für das Monotonieverhalten der Ableitungsfunktion f'(x) im Bereich der Rechtskrümmung des Graphen von f(x) bzw. seiner Linkskrümmung? Ergänze die Zeile (2) der Tabelle.*

Das Krümmungskriterium: Eine Funktion f(x) sei in einem Intervall I zweimal differenzierbar.	
(1) **Wenn f(x) in I rechtsgekrümmt ist,**	**Wenn f(x) in I linksgekrümmt ist,**
(2) dann ist f'(x) in I streng monoton _____	dann ist f'(x) in I _____
(3) **und dann ist f''(x) in I** _____. Es gilt: f''(x) … 0	**und dann ist f''(x) in I** _____. Es gilt: f''(x) … 0

Aufgabe 2: *Wir betrachten die Ableitungsfunktion f'(x) als neue Funktion und wenden auf diese Funktion das Monotoniekriterium an. Was folgt daraus für die zweite Ableitung f''(x) im Bereich der Rechtskrümmung des Graphen von f(x) bzw. seiner Linkskrümmung? Ergänze die Zeile (3) der Tabelle oben.*

Aufgabe 3: *Welche notwendige Bedingung folgt daraus für die Existenz eines Wendepunktes?*

_____

_____

VORSCHAU

Kurvendiskussion / Potenz- & Wurzelfunktionen - Bestell-Nr. P11 853
KOHL VERLAG

netzwerk lernen
zur Vollversion

24 Übungen zur Kurvendiskussion von Potenzfunktionen

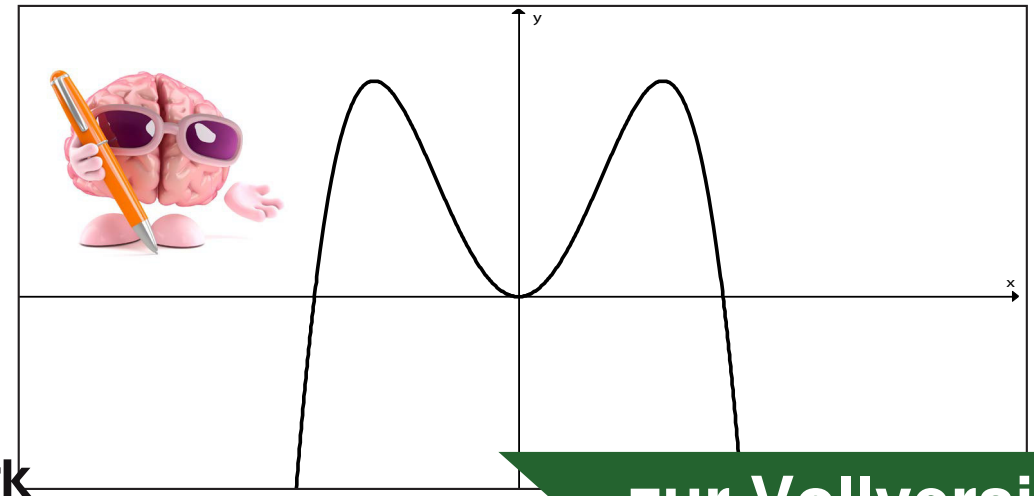
Aufgabe 3: *Gegeben ist die Funktion f durch die Gleichung* $y = f(x) = -\frac{1}{2}x^4 + 3x^2;\ x \in R$

a) *Untersuche den Graphen auf Symmetrie.*

b) *Berechne die Nullstellen der Funktion.*

c) *Der Graph der Funktion besitzt genau drei lokale Extremstellen. Berechne die exakten Werte dieser Extremstellen (ohne Angabe von Näherungswerten, ohne Hilfe des Taschenrechners) und gib jeweils die Art des Extremums an.*

d) *Gib den Wertebereich der Funktion f(x) an.*



VORSCHAU

Kurvendiskussion / Potenz- & Wurzelfunktionen - Bestell-Nr. P11 853
KOHL VERLAG

netzwerk lernen
zur Vollversion

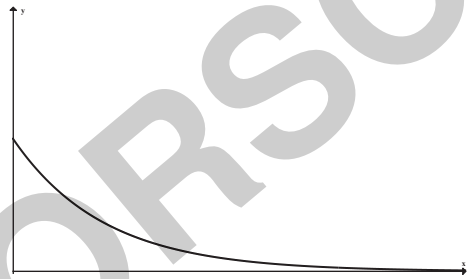
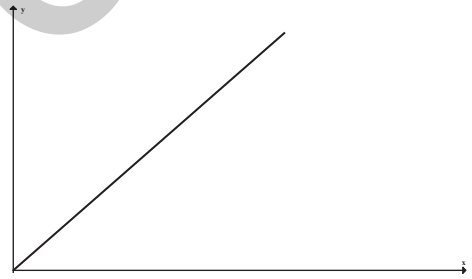
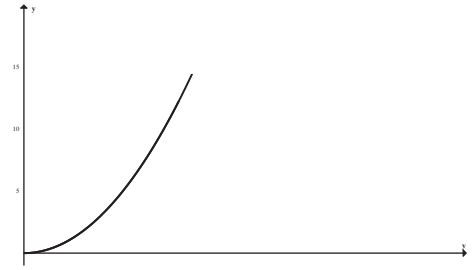
26 Die Lösungen

1 **Aufgabe 1:** Individuelle Lösungen, beispielsweise:
- Fördermenge (z.B. Wasser) einer kontinuierlich arbeitenden Pumpe
- der bei einer gleichförmigen Bewegung zurückgelegte Weg
- der bei einer gleichmäßig beschleunigten Bewegung zurückgelegte Weg
- die Geschwindigkeit bei einer gleichmäßig beschleunigten Bewegung
- verzinstes Kapital
- Bevölkerungswachstum
- Bakterienkulturen

Aufgabe 2: **Freier Fall:**
- Zunahme des Weges in Abhängigkeit von der Zeit beim freien Fall
  quadratischer funktionaler Zusammenhang
  Weg-Zeit-Gesetz bei Vernachlässigung des Luftwiderstandes $\mathbf{s(t) = g/2 \cdot t^2}$
  (Fallbeschleunigung $g \approx 9{,}81$ m/s², Weg s in m, Zeit t in s)
- Zunahme der Fallgeschwindigkeit in Abhängigkeit von der Zeit
  linearer funktionaler Zusammenhang
  Geschwindigkeits-Zeit-Gesetz bei Vernachlässigung des Luftwiderstandes $\mathbf{v(t) = g \cdot t}$
  (Fallbeschleunigung $g \approx 9{,}81$ m/s², Geschwindigkeit v in m/s, s in m, Zeit t in s)

Abnahme des Luftdrucks mit wachsender Höhe über der Erdoberfläche und umgekehrt
exponentieller funktionaler Zusammenhang
internationale Höhenformel
$\mathbf{p(h) = p_0 \cdot ((1 - 0{,}0065\ K / m \cdot h) / T_0)^{5{,}255}\ hPa}$
bzw.
Setzt man h_0 auf Meeresspiegelhöhe, die Temperatur 15 °C = 288,15 K, den Luftdruck auf 1013,25 hPa und den Temperaturgradient 0,65 K pro 100 m, ergibt sich:
$\mathbf{p(h) = 1013{,}25 \cdot ((1 - 0{,}0065\ K / m \cdot h) / 288{,}15\ K)^{5{,}255}\ hPa}$

Aufgabe 3:

Funktionstyp	Beispiel für Wachstum
	– exponentielle Abnahme des Luftdruckes p mit steigender Höhe h – internationale Höhenformel $p(h) = p_0 \cdot ((1 - 0{,}0065\ K / m \cdot h) / T_0)^{5{,}255}$ hPa – x entspricht der Höhe h – y entspricht dem Luftdruck p
	– lineares Wachstum der Geschwindigkeit v beim freien Fall mit der Zeit t – $v = g \cdot t$ – x entspricht der Zeit t y entspricht der Geschwindigkeit v
	– quadratisches Wachstum des Weges s beim freien Fall mit der Zeit t – $s = g/2 \cdot t^2$ – x entspricht der Zeit t y entspricht dem Weg s

VORSCHAU

netzwerk lernen
zur Vollversion