Inhalt

Kurvendiskussion / Trigonometrische Funktionen – Bestell-Nr. P11 855
KOHL VERLAG

1 Trigonometrische Beziehungen am Dreieck

1.1 Fundamentale Gesetze für Dreiecke zur Wiederholung (Blatt 1)

Aufgabe 1: *Wiederhole die grundlegenden Beziehungen zwischen Seiten und Winkeln am allgemeinen Dreieck. Welcher bedeutsame Satz gilt für rechtwinklige Dreiecke? Du benötigst die Gesetze, um die Aufgaben auf Blatt 2 zu lösen.*

(1) Dreiecksungleichung

In jedem nicht entarteten Dreieck sind die Summen der Längen zweier Dreiecksseiten stets größer als die Länge der dritten Seite.

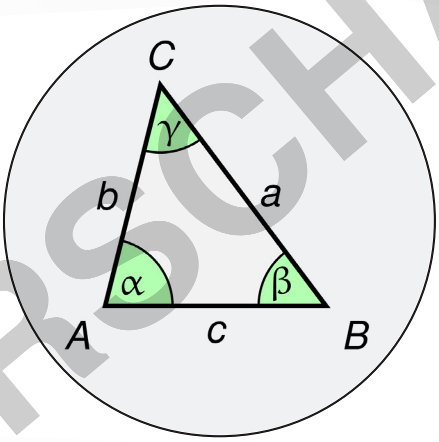
$a + b > c$, $a + c > b$ und $b + c > a$

(2) Innenwinkelsatz

In jedem ebenen Dreieck beträgt die Summe der Innenwinkel 180°.

$\alpha + \beta + \gamma = 180°$

Wie lautet die „Dreiecksungleichung" für reelle Zahlen?



Was gilt für die Summe der Innenwinkel in einem sphärischen Dreieck?

(3) Seiten-Winkel-Beziehung

In jedem Dreieck liegt der größeren von zwei Seiten auch der größere Winkel gegenüber.

Aus $a \leq b$ folgt $\alpha \leq \beta$ usw.

(4) Lehrsatz des Pythagoras

In jedem rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der Kathetenquadrate gleich dem Hypotenusenquadrat.

Für $\gamma = 90°$ folgt

$a^2 + b^2 = c^2$

(5) Kongruenzsätze

siehe Blatt 2

↓

Kurvendiskussion / Trigonometrische Funktionen – Bestell-Nr. P11 855
KOHL VERLAG

1 Trigonometrische Beziehungen am Dreieck

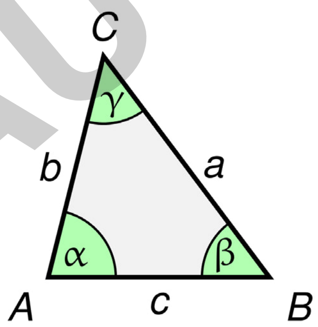
1.1 Fundamentale Gesetze für Dreiecke zur Wiederholung (Blatt 2)

(5) Kongruenzsätze für Dreiecke

Zwei Dreiecke, die in …

– ihren drei Seitenlängen	**sss**
– zwei Seitenlängen und der Größe des von diesen Seiten eingeschlossenen Winkels	**sws**
– einer Seitenlänge und in den dieser Seite anliegenden Winkeln	**wsw**
– in zwei Seitenlängen und in dem der längeren Seite gegenüberliegenden Winkel	**SsW**

übereinstimmen, sind **kongruent**.



Aufgabe 1: *Existieren folgende wie im Bild rechts benannte Dreiecke? Gib die Nummer des entsprechenden mathematischen Gesetzes an, welches als Grundlage für deine Entscheidung bei „Dreieck existiert nicht“ dient.*

a) $c = 10$ cm, $a = 12$ cm, $\gamma = 90°$

____

b) $\alpha = 90°$, $a = 20$ cm, $c = 16$ cm

____

c) $b = 13$ cm, $c = 12$ cm, $\beta = 90°$

____

d) $a = 7$ cm, $b = 8$ cm; $c = 16$ cm

____

e) $a = b = 8$ cm, $\alpha = 50$, $\gamma = 90°$

____

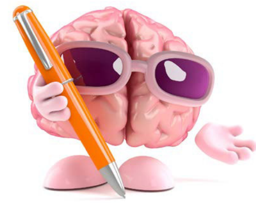
KOHL VERLAG Kurvendiskussion / Trigonometrische Funktionen – Bestell-Nr. P11 855

1 Trigonometrische Beziehungen am Dreieck

1.2 Definition von Sinus, Kosinus und Tangens am rechtwinkligen Dreieck (Blatt 1)

Aufgabe 1: ***a)*** *Konstruiere ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit folgenden Abmessungen:*
c = 5 cm , α = 30°, γ = 90°

b) *Ermittle die Länge der Strecke a zeichnerisch.*



c) *Berechne das Streckenverhältnis $\frac{a}{c}$.*
Trage die Werte in die untenstehende Tabelle ein.

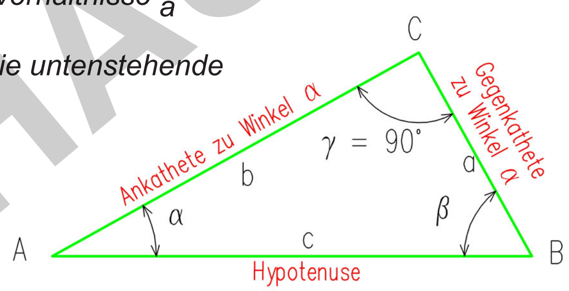
Aufgabe 2: ***a)*** *Konstruiere nun fünf weitere Dreiecke mit den Abmessungen für α und γ wie bei Aufgabe 1 und c = 6 cm (8 cm, 9 cm, 10,5 cm, c nach eigener Wahl)*

b) *Ermittle in jedem dieser Dreiecke die Länge der Strecke a.*

c) *Berechne die entsprechenden Streckenverhältnisse $\frac{c}{a}$ auf Zehntel genau.*
Trage sämtliche Werte übersichtlich in die untenstehende Tabelle ein.

d) *Zu welcher Erkenntnis kommst du?*

e) *Führe eine analoge Untersuchung bei verändertem Winkel α = 60° durch.*



α	γ	c	a	$\frac{a}{c}$
30°	90°			
60°				

Aufgabe 3:

Vom Endpunkt E einer Hauswand, deren Länge EF = 15,5 m bekannt ist, wird ein Punkt P im Garten unter einem Winkel von 60° angepeilt. Von P aus erscheint die Grundseite EF der Hauswand unter einem Winkel von 90°.

Fertige eine Skizze an und berechne unter Nutzung deiner Erkenntnisse aus Aufgabe 2 die Länge der Strecke FP.

KOHL VERLAG Kurvendiskussion / Trigonometrische Funktionen – Bestell-Nr. P11 855

1.2 Definition von Sinus, Kosinus und Tangens am rechtwinkligen Dreieck (Blatt 2)

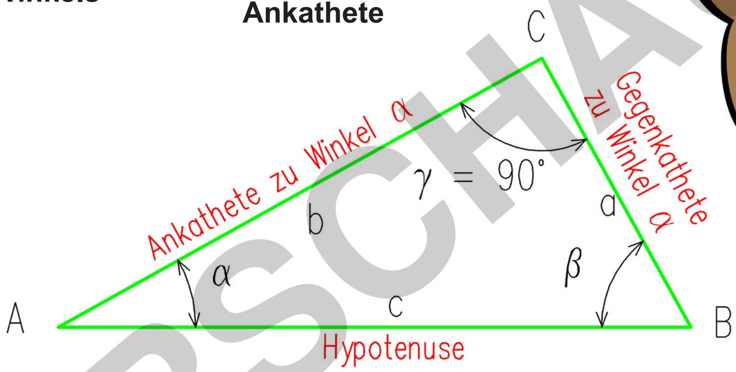
In ähnlichen Dreiecken, die in allen drei Winkeln übereinstimmen, stimmen auch die Verhältnisse der Längen einander entsprechender Seiten überein. Am rechtwinkligen Dreieck werden die Seitenverhältnisse mit besonderen Begriffen definiert. Ihr Wert hängt von der Größe des entsprechenden spitzen Winkels ab und nimmt somit für alle Winkel gleicher Größe den gleichen Wert an.

Definition des Sinus eines Spitzen Winkels im rechtwinkligen Dreieck

$$\textbf{Sinus eines Winkels} = \frac{\textbf{Gegenkathete des Winkels}}{\textbf{Hypotenuse}}$$

$$\textbf{Kosinus eines Winkels} = \frac{\textbf{Ankathete des Winkels}}{\textbf{Hypotenuse}}$$

$$\textbf{Tangens eines Winkels} = \frac{\textbf{Gegenkathete des Winkels}}{\textbf{Ankathete}}$$



Kurzschreibweise beispielsweise: sin α, cos α, tan β, sin 30°, cos 60° usw.

Für die meisten Winkel ergeben sich mit wenigen Ausnahmen irrationale Zahlen für Sinus, Kosinus und Tangens und auch das Ermitteln durch Konstruktion liefert meist keine exakten Ergebnisse. Deshalb ist der Einsatz des Taschenrechners hier sinnvoll.

Aufgabe 4: *Ermittle folgende Seitenverhältnisse mit dem Taschenrechner. Gib die Ergebnisse auf vier Stellen nach dem Komma an, wobei die vierte Stelle gerundet werden soll.*

sin 60° ≈ ______________ cos 60° = ______________

sin 45° ≈ ______________ cos 45° ≈ ______________

sin 30° = ______________ cos 30° ≈ ______________

tan 45° = ______________ tan 60° ≈ ______________

Aufgabe 5: *Was fällt dir beim Vergleich auf?*

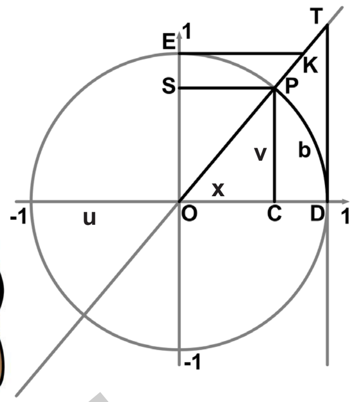
Kurvendiskussion / Trigonometrische Funktionen – Bestell-Nr. P11 855
KOHL VERLAG

2.10 Die Tangensfunktion f(x) = tan x (Blatt 1)

Die Wahl des Namen „Tangens“ durch den Mathematiker Thomas Finck, der die Bezeichnung 1583 einführte, erklärt sich unmittelbar durch die Definition am Einheitskreis.

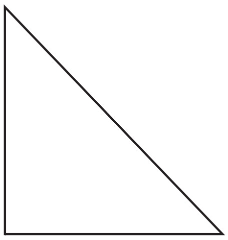
Die Funktionswerte der Tangensfunktion entsprechen der Länge des vom Winkel x (im Bogenmaß) abhängigen Tangentenabschnitts DT.

Gleichfalls gilt: $f(x) = \tan x = \frac{v}{u} = \frac{\sin x}{\cos x}$

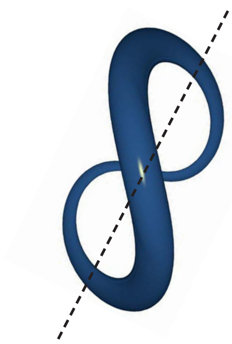


Zur Information:
Die Funktionswerte der nicht mehr in der Schulmathematik verwendeten Kotangensfunktion entsprechen analog der Länge des vom Winkel x (im Bogenmaß) abhängigen Tangentenabschnitts EK.

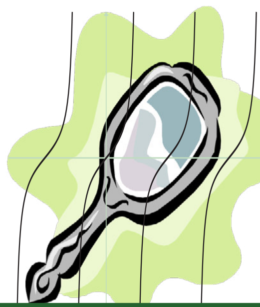
Aufgabe 1: *Begründe, dass gilt: $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$. Ergänze die Skizze passend.*



Aufgabe 2: *Warum ist tan x an der Stelle $x = \frac{\pi}{2}$ nicht definiert? Wie verhalten sich die Funktionswerte der Funktion f(x) = tan x bei Annäherung der x-Werte an die Stelle $\frac{\pi}{2}$? Gib die Gleichung der senkrechten Asymptote an.*



Aufgabe 3: *Welche Symmetrieeigenschaft hat die Funktion f(x) = tan x? Veranschauliche die Symmetrie durch Vergleich der Funktionswerte f(x) und f(-x) an einem selbst gewählten Beispiel.*



2.10 Die Tangensfunktion (Blatt 3)

Aufgabe 6: *Welche typischen Eigenschaften hat die Tangensfunktion? Vervollständige die Übersicht.*

f(x) = tanx		**Formeln**
Definitionsbereich		
Wertebereich		
Symmetrie		
kleinste Periode		
Nullstellen		
Extrempunkte		

Aufgabe 7: *An welcher Stelle x (Winkel im Gradmaß und im Bogenmaß) des Intervalls $[0 \le x \le \frac{\pi}{2}]$ nimmt die Tangensfunktion den Wert 100 an? Ermittle das Ergebnis mit Hilfe des Taschenrechners.*

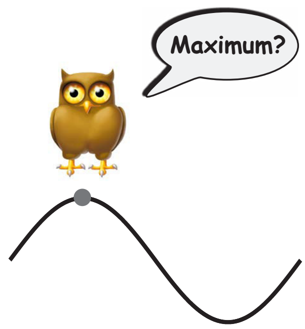
Hinweise:
- *Um bei gegebenem Funktionswert den zugehörigen Winkel zu ermitteln, benötigst du die Tasten* tan *und* INV *(Umkehrfunktion) in Kombination.*
- *Du kannst den Winkel mit dem Taschenrechner beispielsweise im Gradmaß bestimmen und dann mit der bekannten Formel (siehe Kapitel 2.3) ins Bogenmaß umrechnen oder aber über die Einstellung deines Taschenrechner das Ergebnis im Gradmaß (Einstellung auf „DEG“) oder im Bogenmaß (Einstellung auf „RAD“) ermitteln.*

Aufgabe 8: *Für welche Winkel (im Gradmaß) nimmt die Tangensfunktion die Werte 1000, 10 000, 100 000 an? Was kannst du für $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \tan x$ schlussfolgern?*

tan x	1000	10 000	100 000
x in Grad			

KOHL VERLAG – Kurvendiskussion / Trigonometrische Funktionen – Bestell-Nr. P11 855

3.5 Beispiel für eine vollständige Kurvendiskussion trigonometrischer Funktionen (Blatt 2)

Ableitungen $f'(x) = 2 \sin x \cdot \cos x - \frac{1}{2} \sin x$ $f''(x) = 2 \cos^2 x - 2 \sin^2 x - \frac{1}{2} \cos x$ $f'''(x) = - 8 \sin x \cdot \cos x + \frac{1}{2} \sin x$ 	$f(x) = \sin^2 x + \quad \cos x$ | Kettenregel $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ $f'(x) = 2 \sin x \cdot \cos x - \frac{1}{2} \sin x$ | Produktregel | $(f(x) \cdot g(x))' =$ $f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$ $f''(x) = 2 \cos x \cdot \cos x + 2 \sin x \cdot (-\sin x) - \quad \cos x$ $f''(x) = 2 \cos^2 x - 2 \sin^2 x - \frac{1}{2} \cos x$ | Kettenregel $f'''(x) = 2 \cdot 2 \cos x \cdot (-\sin x) - 2 \cdot 2 \sin x \cdot \cos x - \frac{1}{2} (-\sin x)$ $f'''(x) = - 8 \sin x \cdot \cos x + \frac{1}{2} \sin x$
Extrempunkte **Tiefpunkte** **T_{k1} $(2k\pi, k \in Z; 0{,}5)$** **T_{k2} $(2k + 1)\pi, k \in Z; - 0{,}5)$**  **Hochpunkte** **H_1 $(\approx 1{,}318 + 2k\pi, k \in Z; \approx 1{,}062)$** **$H_2$ $(\approx 4{,}965 + 2k\pi, k \in Z; \approx 1{,}062)$** 	notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$ $2 \sin x \cdot \cos x - \frac{1}{2} \sin x = 0$ $2 \sin x \cdot (\cos x - \frac{1}{4}) = 0 \Rightarrow \sin x = 0$ oder $\cos x - \frac{1}{4} = 0$ Ein Produkt ist Null, wenn einer der Faktoren Null ist. Aus dem Ansatz $\sin x = 0$ ergeben sich im Grundintervall $[0 \leq x \leq 2\pi]$ die Basislösungen $x_1 = 0$ $x_2 = \pi$ und $x3 = 2\pi$ hinreichend Bedingung: $f''(x) \neq 0$ und $f''(x) < 0 \Rightarrow$ Maximum $f''(x) > 0 \Rightarrow$ Minimum $f''(0) = 2 \cos^2 0 - 2 \sin^2 0 - \frac{1}{2} \cos 0 = 1{,}5 > 0 \Rightarrow$ Minimum $f''(\pi) = 2 \cos^2 \pi - 2 \sin^2 \pi - \frac{1}{2} \cos \pi = 2{,}5 > 0 \Rightarrow$ Minimum $f''(2\pi) = 2 \cos^2 2\pi - 2 \sin^2 2\pi - \frac{1}{2} \cos 2\pi = 1{,}5 > 0 \Rightarrow$ Minimum Für den gesamten Definitionsbereich ergeben sich die Extremstellen der Tiefpunkte $x_k = k\pi; k \in Z$ Funktionswerte der Tiefpunkte $f(0) = \sin^2 0 + \frac{1}{2} \cos 0 = 0{,}5$; $f(\pi) = \sin^2 \pi + \frac{1}{2} \cos \pi = - 0{,}5$ $f(2\pi) = \sin^2 2\pi + \frac{1}{2} \cos 2\pi = 0{,}5$ usw. Nimmt x ein ungeradzahliges Vielfaches von π - für eine ganze Zahl k also gilt dann $x = (2k + 1)\pi$ - an, beträgt der Funktionswert des Tiefpunktes - 0,5: nimmt x ein geradzahliges Vielfaches von π - also $x = 2k\pi$ mit der ganzen Zahl k - an, beträgt der Funktionswert 0,5.

4 Die Lösungen

2 2.7 Kombination von Modifikationen der Sinusfunktion

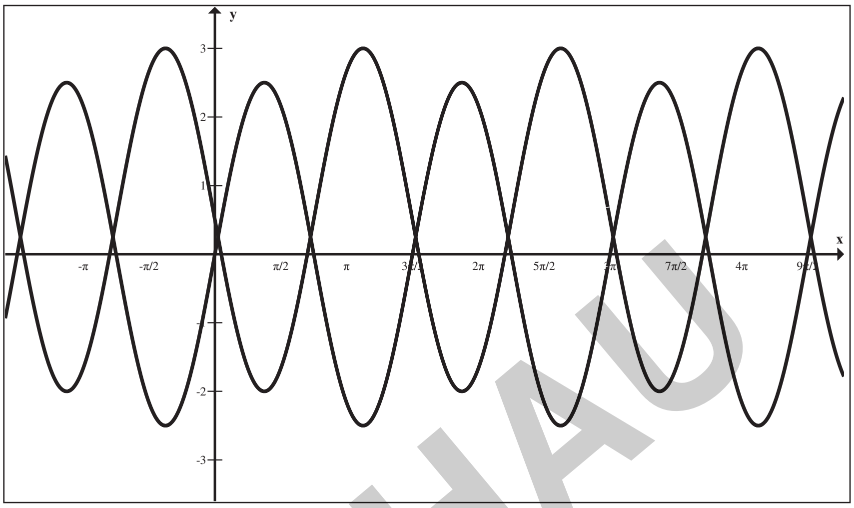
Aufgabe 1:

a = 2,5

p = $\frac{3\pi}{2}$

Aus p = $\frac{2\pi}{b}$ folgt **b = $\frac{2\pi}{\left(\frac{3\pi}{2}\right)} = \frac{4}{3}$**

Aufgabe 2: **a)**



b) Die Funktion g(x) = -2,5 · sin($\frac{4}{3}$ · x) + 0,5 hat den Wertebereich **[-2 ≤ y ≤ 3]**.

Aufgabe 3: Wahr sind:

☒ **A** Die Funktion h(x) = 2 · sin(0,5 · x) hat die kleinste Periode p = 4π.

☒ **D** Der Wertebereich der Funktion h(x) = 2 · sin(0,5 · x) ist W = [-2 ≤ y ≤ 2].

2 2.8 Puzzeln mit Sinusfunktionen

Aufgabe 1:

Graph	A	B	C	D	E	F	G
Funktion f	f_5	f_3	f_7	f_2	f_1	f_6	f_4