Positive und negative Zahlen — 1.15

Vorüberlegungen

Ziele und Inhalte:

- *Die Schüler erfahren, dass positive und negative Zahlen benötigt werden, um Realität zu beschreiben. Sie festigen ihr Wissen bei konkreten Anwendungen.*
- *Sie lernen die fundamentale Idee kennen, die hinter der Einführung negativer Zahlen steht. Sie verstehen danach auch die poetische Aussage „Die negativen Zahlen sind der mathematische Ausdruck für die menschliche Sehnsucht“.*
- *Sie erwerben konkrete, logisch stimmige und daher belastbare Grundvorstellungen zu den Vorzeichen und Operationszeichen beim Rechnen mit positiven und negativen Zahlen.*

Weißt du, was der mathematische Ausdruck für die Sehnsucht ist?
Es sind die negativen Zahlen!
Peter Hoeg in „Fräulein Smillas Gespür für Schnee“

Zentrales Anliegen:

Zur Mathematik: Zugrunde liegt beispielsweise die additive Halbgruppe der natürlichen Zahlen. Dann werden negative Zahlen eingeführt, um die Halbgruppe zu einer Gruppe zu erweitern. Jeder Schüler soll die Frage „Was hat sich eigentlich nach der Einführung negativer Zahlen **wesentlich geändert**?“ beantworten können: In einer Gruppe gibt es zu jedem Element genau ein **inverses Element**. Hier gibt es zu jeder Zahl genau eine Gegenzahl.

Bei der Einführung negativer Zahlen kann formal vorgegangen werden. Dann werden die schon bekannten Zahlen mit einem eigentlich entbehrlichen positiven Vorzeichen versehen. Zu jeder positiven Zahl a wird eine negative Zahl als Lösungselement der Gleichung $x + a = 0$ dazugenommen. Diese wird „$0 - a$“ oder kurz „$-a$“ geschrieben. Nach einer solchen Einführung wird allerdings $-a$ für viele Lernenden selbst dann negativ bleiben, wenn a für eine negative Zahl stehen kann. Eine Addition und eine Multiplikation werden entsprechend dem Permanenzprinzip so festgelegt, dass bekannte Rechengesetze erhalten bleiben. Vorzeichen und Rechenoperationen haben bei dieser Einführung keine konkrete inhaltliche Bedeutung.

Positive und negative Zahlen können hingegen auch mit der Realität verknüpft und so von den Lernenden als bedeutungsvoll erlebt werden. Dabei werden die bereits bekannten Zahlen durch das positive Vorzeichen zu neuen Objekten, zu denen gleichrangig negative Zahlen treten. Sowohl alltäglich erlebte als auch nachvollziehbare gedachte Situationen können Modelle abgeben, mit denen Schüler nachhaltige Grundvorstellungen erwerben, wobei die Vorzeichen und auch die Operationszeichen keine sinnleeren Symbole sind, sondern konkrete Bedeutungen haben. **Modelle für eine mathematische Struktur** können einen Mangel haben, da sie nicht alle Eigenschaften der angestrebten Struktur aufweisen, und sie können ein Surplus in Gestalt von Eigenschaften haben, von denen abgesehen (abstrahiert) werden muss. Das Modell darf allerdings nicht von grundlegend anderer Art als die angestrebte Struktur sein, denn es soll ja **Vorbildcharakter** haben und **Orientierung** geben. Angestrebte grundlegende Strukturen sind hier:

- Positive und negative Zahlen sind Elemente einer Gruppe.
- Diese Gruppe operiert auf einer Menge von Zahlen oder von Punkten einer Zahlengeraden.

1.15	Positive und negative Zahlen

Vorüberlegungen

Für das Ziel der Erweiterung einer Halbgruppe ist es wesentlich, dass die Addition eine **assoziative innere Verknüpfung** auf einer Menge von Zahlen ist.

Wir betrachten eine im Unterricht bewährte Grundsituation: Herr Härle hat ein Konto. Der Kontostand ist ausgeglichen. Dieser **Zustand** wird durch die Zahl 0 charakterisiert. Frau Bauer ist Bankangestellte. Sie betreut das Konto. Sie nimmt eine Gutschrift von 100 € vor. Diese **Handlung** (dieser **Vorgang**) wird durch die Zahl +100 beschrieben. Auf dem Konto ist danach ein Guthaben von 100 €. Dieser *Zustand* wird auch durch die Zahl +100 beschrieben. Danach nimmt Frau Bauer eine Lastschrift von 300 € vor. Dieser *Handlung* (diesem Vorgang) wird die negative Zahl –300 zugeordnet. Danach ist das Konto mit 200 € im Soll – es hat den durch –200 € erfassten *Zustand*. Die beiden hintereinander ausgeführten Vorgänge können gleichwertig durch eine Lastschrift von 200 € ersetzt werden – dann werden *zwei Vorgänge verknüpft*, um durch einen gleichwertigen Vorgang ersetzt zu werden. Diese Verknüpfung kann Addition genannt werden, denn es handelt sich um eine innere Verknüpfung auf der Menge der Vorgänge.
Da jeder Vorgang einen Zustand des Kontos in einen anderen überführt, bewirkt er eine Abbildung der Menge der Zustände des Kontos auf sich. Selbstverständlich müssen **Vorgänge und Zustände streng unterschieden** werden. Der strukturelle (mathematische) Unterschied ist auch von der beschriebenen Realität her bedeutsam: Es ist kein geringer Unterschied, ob jemand 500 € Schulden hat oder 500 € Schulden macht. Es ist durchaus nicht gleichgültig, ob alte Schulden oder nur die Neuverschuldung reduziert und sogar auf „Null gefahren“ werden. Mathematikunterricht muss nicht zuletzt Verantwortung dafür übernehmen, dass Schüler befähigt werden, zum Beispiel Aussagen von Politikern und Journalisten angemessen zu bewerten.

Zahlen sind geordnet. Die Menge der Zustände eines Kontos ist ebenfalls geordnet und die sie erfassenden Zahlen können auf einer Zahlengeraden angegeben werden, die nach beiden Seiten unbegrenzt gedacht wird. An ihr wird deutlich, dass –200 kleiner als 0 ist. Dies entspricht der Erfahrung, dass 200 € Schulden-Haben weniger Besitz als ein ausgeglichenes Konto ist. Damit begegnet **Leonard Euler** dem bei der Einführung negativer Zahlen hinderlichen Vorurteil, dass keine Zahl kleiner als 0 sein könne. Eine Menge von positiven und negativen Zahlen ist geordnet. Die Menge der möglichen Zustände eines Kontos hat diese eine Eigenschaft. Auch eine nach beiden Seiten unbegrenzt gedachte Celsiusskala hat diese Eigenschaft. Beide sind Modelle für eine **geordnete Menge** positiver und negativer Zahlen – nicht mehr, aber auch nicht weniger.

Zahlen haben aber weitere unverzichtbare Eigenschaften. Vor allem soll mit Zahlen gerechnet werden. Im Besonderen wollen wir positive und negative Zahlen addieren. Die Addition ist eine **innere Verknüpfung** auf der Menge der zugrunde liegenden Zahlen, das bedeutet, dass jedem geordneten Paar von Zahlen eine Zahl zugewiesen wird. Dabei sind die drei Zahlen von gleicher Art. Würde die erste einen Vorgang, die zweite einen Zustand und die dritte einen Zustand beschreiben, dann hätten wir es nicht mit einer inneren, sondern mit einer äußeren Verknüpfung zu tun. Dies wäre ein Gegenmodell für die gewünschte Addition!

Frau Bauer nimmt eine Gutschrift von 100 € und danach eine Lastschrift von 300 € vor. Um den gleichen Kontostand zu erreichen, hätte sie beide Handlungen durch eine einzige gleichwertig ersetzen können – sie hätte dann eine Lastschrift von 200 € vornehmen müssen. Diese einfache Überlegung wird durch $(+100) + (-300) = -200$ erfasst. Hier steht die Addition für die Verkettung (das Hintereinanderausführen) von zwei Vorgängen (Handlungen). Die Vorgänge sind Abbildungen der Menge der Zustände auf sich. Das Verketten (Hintereinanderausführen) von Abbildungen ist stets assoziativ. Eine Gutschrift oder Lastschrift bewirkt auf der Zahlengeraden eine Verschiebung. Dem Verketten von Vorgängen entspricht das Hintereinanderausführen von Verschiebungen der Zahlengeraden in sich.

Positive und negative Zahlen | 1.15

Vorüberlegungen

Einordnung:

Den Schülern sollen bei der Einführung negativer Zahlen konkrete Modelle vorgestellt werden, die geeignet sind, nachhaltig logisch stimmige Grundvorstellungen zu den Vorzeichen und den Operationszeichen aufzubauen.

Hierzu werden Arbeitsblätter vorgelegt, welche bei der Einführung positiver und negativer Zahlen von Nutzen sein möchten.

Natürlich gibt es auch Arbeitsblätter, um das Rechnen mit ganzen Zahlen zu üben. Unverzichtbar sind vor allem Arbeitsblätter, in denen positive und negative Zahlen bei konkreten Aufgaben zur Anwendung kommen. Ausführliche Lösungsangaben ermöglichen selbstständiges Arbeiten der Schüler.

Die einzelnen Unterrichtsschritte im Überblick:

1. Schritt: Positive und negative Zahlen können nützlich sein
2. Schritt: Zahl und Gegenzahl
3. Schritt: Addition und Subtraktion
4. Schritt: Zur Multiplikation
5. Schritt: Vereinfachung der Schreibweise
6. Schritt: Rechengesetze
7. Schritt: Einige Anwendungen

Positive und negative Zahlen	1.15

Unterrichtsplanung

1. Schritt: Positive und negative Zahlen können nützlich sein

Wir beginnen mit einer Situation, die problemlos zum Aufbau tragfähiger Grundvorstellungen zur Addition positiver und negativer Zahlen geeignet ist. Es schließen sich weitere Beispiele an, die als Modelle für die Addition positiver und negativer Zahlen dienen können.
(**Arbeitsblätter** siehe **M1 bis M3**, **Lösungen** siehe **M4 und M5**)

2. Schritt: Zahl und Gegenzahl

Zu Handlungen kann es Gegenhandlungen, zu Vorgängen kann es Gegenvorgänge geben oder es können solche wenigstens gedacht werden. Entsprechend gibt es sowohl zu jeder positiven als auch zu jeder negativen Zahl jeweils die Gegenzahl.
(**Arbeitsblatt** siehe **M6**, **Lösungen** siehe **M7**)

3. Schritt: Addition und Subtraktion

Die Addition einer Zahl wird durch eine folgende Subtraktion dieser Zahl aufgehoben. Eine Handlung kann durch die Gegenhandlung aufgehoben werden. Offensichtlich kann eine Subtraktion durch die Addition einer Gegenzahl ersetzt werden. Addition und Subtraktion sollen auch eingeübt werden. Dabei soll jeder Schüler jeweils ganz für sich entscheiden, ob ihm eine Kopfrechnung genügt oder ob er ein schriftliches Verfahren heranziehen sollte.
(**Arbeitsblätter** siehe **M8 und M9**, **Lösungen** siehe **M10 und M11**)

4. Schritt: Zur Multiplikation

Die multiplikative Halbgruppe der ganzen Zahlen kann auf der Menge der ganzen Zahlen operieren. Dies kann durchaus zur Beschreibung alltäglicher Situationen herangezogen werden.
(**Arbeitsblätter** siehe **M12 und M13**, **Lösungen** siehe **M14**)

5. Schritt: Vereinfachung der Schreibweise

Nachdem positive und negative Zahlen bekannt sind, können verkürzte Schreibweisen beim praktischen Rechnen eingesetzt werden.
(**Arbeitsblatt** siehe **M15**, **Lösungen** siehe **M16**)

6. Schritt: Rechengesetze

Es wird an Rechengesetze erinnert. Überdies kann festgestellt werden, dass nach der Einführung negativer Zahlen die Subtraktion entbehrlich ist. So wird verständlich, dass bei der Definition eines

Positive und negative Zahlen	1.15
Arbeitsblatt 1 (3)	M3

Aufgabe 5:
Paul sammelt Briefmarken. Am 1. Januar hatte er 820 Briefmarken. Paul notiert im Laufe des Januars:
+7; +14; –5; +13; –11; +22.
Wie viele Briefmarken hat Paul am 1. Februar?

Aufgabe 6:
Sabine beobachtet in dieser Woche die Entwicklung des Wetters. Jeden Tag misst sie um 12.00 Uhr die Temperatur und macht danach eine Notiz.
Ausgangstemperatur am Sonntag: +5 °C.
Temperaturentwicklung:
–2 Grad; 0 Grad; +2 Grad; +7 Grad; +2 Grad; –1 Grad; –3 Grad.
a) Wie war die Temperatur am folgenden Sonntag?
b) Zwischen welchen Tagen stieg die Temperatur am kräftigsten?
c) An welchem Tag war es am wärmsten?

Aufgabe 7:
Swetlana hat sich auf mehrere Runden eines Glücksspieles eingelassen. Sie notiert die Ergebnisse der einzelnen Runden:
+2 €; +5 €; +12 €; –5 €; 0 €; +30 €; –4 €; –20 €; +4 €; –12 €; –13 €; –60 €.
Was ist insgesamt geschehen?
Berichte in einer kleinen Geschichte über Swetlanas Gefühle.
Nach welcher Runde hätte Swetlana das Glücksspiel abbrechen sollen?

Aufgabe 8:
Emil bekommt von seinem Opa ein Sparschwein. Der Opa legt 30,00 € in das Schwein und sagt:
„Werden 30 € in das Schwein gelegt, dann bildet Emil ein Guthaben und er kann +30,00 notieren. Nimmt er 20,00 € aus dem Schwein, dann hebt er ab und kann dafür –20,00 notieren."
Opa bittet Emil, gewissenhaft zu notieren, was mit dem Inhalt seines Sparschweins geschieht.
Emil notiert:
+30,00; +20,00; +5,00; –6,50; –2,00; –9,80; +20,00; –6,50; –10,50; –6,50; +20,00.
Beschreibe die Entwicklung des Inhalts des Sparschweins mithilfe einer einzigen Zahl.

Aufgabe 9:
Am Morgen des 2. Februar ist Herrn Müllers Konto mit 50 € im Soll. Das bedeutet, dass die seit der Eröffnung des Kontos durchgeführten Kontobewegungen insgesamt das gleiche Ergebnis wie eine einmalige Lastschrift von 50 € haben. Im Laufe des Tages nimmt die Bank eine Lastschrift von 240 €, eine weitere Lastschrift von 45 € und eine Gutschrift von 500 € vor.
Wie hat sich der Kontostand innerhalb des 2. Februars verändert?
Wie ist der Kontostand am Abend des 2. Februars?

Aufgabe 10:
Im Folgenden sind einige Situationen beschrieben. Formuliere jeweils mindestens eine sinnvolle Frage und beantworte diese.
a) Abends hatte es noch 0 °C. Bis um 6.00 Uhr war die Temperatur um 5 Grad gesunken. Innerhalb der nächsten 6 Stunden wurde es um 8 Grad wärmer.
b) Im Januar hat die Insel bei der großen Sturmflut 24 ha Land verloren. Im Laufe des Jahres konnten dem Meer 18 ha Land abgerungen werden.
c) Das U-Boot schwamm auf der Wasseroberfläche, tauchte 240 m ab, stieg um 150 m, sank um 170 m, sank um 80 m, stieg um 180 m und stieg um 160 m.

1.15	Positive und negative Zahlen
M4	Lösungen zu Arbeitsblatt 1 (2)

Lösung 1:

a) $(+3) + (+4) + (+6) + (+8) + (+5) + (+6) + (+64) = 96$
Er geht 96 Schritte auf das Haus zu.

b) $(-3) + (-2) + (-3) + (-1) + (-1) = -10$
Er macht 10 Schritte vom Haus weg.

c) $(+96) + (-10) = [(+86) + (+10)] + (-10) = +86 + [(+10) + (-10)] = +86 + 0 = +86$
Der Blumenkübel ist 86 Schritte vom Haus entfernt.

d) $96 + |-10| = 96 + 10 = 106$
Frieder macht insgesamt 106 Schritte.

e) $(+3) + (-2) + 0 + (+2) + 0 + (+5) + 0 + (-8) = 0$
Frieder kehrt zur Blume zurück.

f) Hier läuft Frieder von zu Hause weg.

Lösung 2:

a) $(+8) + (+4) + (-17) + (+12) + (-3) + (+14) + (+2) + (-7) + (-9) = +4$
Der Fahrstuhl befindet sich nun 4 Stockwerke höher, also im 9. Stockwerk.

b) Die größte Zwischensumme ist $(+8) + (+4) + (-17) + (+12) + (-3) + (+14) + (+2) = +20$
Der Fahrstuhl ist 20 Stockwerke über dem 5. Stockwerk. Das Hochhaus hat mindestens 25 Stockwerke.

Lösung 3:

a) $(+3) + (-5) + (-4) + (+2) + (-7) + 0 + (+10) + (+5) + (+8) + (-3) = +9$
Um 8.10 Uhr sind 9 Personen mehr als um 8.00 Uhr im Haus.

b) Die kleinste Zwischensumme: $(+3) + (-5) + (-4) + (+2) + (-7) = -11$
Um 8.05 Uhr waren 11 Personen weniger als um 8.00 Uhr im Haus. Deshalb müssen um 8.00 Uhr mindestens 11 Personen im Haus gewesen sein.
Um 8.10 Uhr sind mindestens 20 Personen im Haus.

Lösung 4:

a) $(+22) + (+57) + (+64) + (+12) + (+16) + (+3) = +174$
Es steigen 174 Personen zu. Diese und Herr Härle fahren wenigstens ein Stück mit der Bahn.

b) $0 + (+22) + (-3) + (+57) + (-9) + (+64) + (-44) + (+12) + (-55) + (+16) + (-48) + (+3) = +15$
Es kommen 15 Fahrgäste und Herr Härle, also 16 Personen in G an.

c) Nur zwischen C und E können nicht alle Personen sitzen.
Die größte Zwischensumme: $0 + (+22) + (-3) + (+57) + (-9) + (+64) = +131$
Zwischen C und D sind mit Herrn Härle 132 Personen im Zug. 36 Personen haben auf diesem Abschnitt keinen Sitzplatz. Zwischen D und E haben 4 Personen keinen Sitzplatz.

d) In A: $0 + |+22| = 22$. In B: $|-3| + |+57| = 60$. In C: 73. In D: 56. In E: 71. In F: 51.
In der Endstation: 15 Fahrgäste und Herr Härle.
In C sind die meisten Fahrgäste zu- oder ausgestiegen.

e) In A: 0. In B: $|-3| = 3$. In C: 9. In D: 44. In E: 55. In F: 48. Endstation: 15 und Herr Härle.
In E sind 55 Personen ausgestiegen, an keiner Haltestelle sind mehr ausgestiegen.

f) In A: $|0 + (+22)| = 22$. In B: $|(-3) + (+57)| = 54$. In C: 55. In D: 32. In E: 39. In F: 45.
Endstation: 15 Fahrgäste und Herr Härle.
In C verändert sich die Anzahl der Fahrgäste am stärksten.

Positive und negative Zahlen	1.15
Lösungen zu Arbeitsblatt 1 (3)	M5

Lösung 5:
(+7) + (+14) + (–5) + (+13) + (–11) + (+22) = +40
Ende Januar hat Paul 40 Briefmarken mehr als am 1. Januar.
Ende Januar hat er 860 Briefmarken.

Lösung 6:
a) (–2) + 0 + (+2) + (+7) + (+2) + (–1) + (–3) = +5
Es war um 5 Grad wärmer. Die Temperatur betrug +10 °C.
b) Zwischen Mittwochmittag und Donnerstagmittag wurde es um 7 Grad wärmer. Dies war die größte Temperaturerhöhung von einem Mittag auf den nächsten Mittag.
c) Maximale Zwischensumme: (–2) + 0 + (+2) + (+7) + (+2) = +9
Am Freitag war es am wärmsten. Am Freitagmittag betrug die Temperatur 14 °C.

Lösung 7:
(+2) + (+5) + (+12) + (–5) + 0 + (+30) + (–4) + (–20) + (+4) + (–12) + (–13) + (–60) = –61
Swetlana hat in 12 Runden 61 € verloren. Hätte sie nach der 6. Runde abgebrochen, hätte sie 44 € gewonnen.

Lösung 8:
(+30,00) + (+20,00) + (+5,00) + (–6,50) + (–2,00) + (–9,80) + (+20,00) + (–6,50) + (–10,50) + + (–6,50) + (+20,00) = +53,20
Emil hat 53,20 € Guthaben gebildet. Im Sparschwein sind nun 53,20 €.

Lösung 9:
Wir nehmen an, dass der Zustand „50 € im Soll“ dadurch zustande kommt, dass in der Nacht auf dem ausgeglichenen Konto eine Lastschrift von 50 € vorgenommen wird. Dann haben insgesamt vier Vorgänge stattgefunden, welche wir durch einen einzigen gleichwertigen ersetzen können:
(–50) € + (–240) € + (–45) € + (+500) € = +165 €
Der Kontostand des ausgeglichenen Kontos wurde um 165 € erhöht. Auf dem Konto ist nun ein Guthaben von 165 €.

<u>Andere Argumentation:</u>
Vorgänge des Tages: (–240) € + (–45) € + (+500) € = +215 €
Das Konto war mit 50 € im Soll. Die Vorgänge des Tages bewirken insgesamt eine Erhöhung um 215 €.
Es ist 215 € – 50 € = 165 €.
Am Ende des Tages ist auf dem Konto ein Guthaben von 165 €.

Lösung 10:
a) Welche Temperatur herrschte um 12.00 Uhr?
–5 Grad + (+8) Grad = +3 Grad. Insgesamt ist es um 3 Grad wärmer geworden.
Um 12.00 Uhr hat es +3 °C.
b) Wie veränderte sich die Fläche des Landes innerhalb des Jahres?
–24 ha + (+18) ha = 6 ha. Das Land ist innerhalb des Jahres um 6 ha kleiner geworden.
c) In welcher Tiefe befand sich das U-Boot nach diesen Manövern?
(–240) m + (+150) m + (–170) m + (–80) m + (+180) m + (+160) m = 0 m.
Das U-Boot schwamm auf der Wasseroberfläche.

1.15	Positive und negative Zahlen
M12	Arbeitsblatt 4 (1)

Zur Multiplikation

Zur Einstimmung:
Oskars Modelleisenbahn besteht aus 2 Teilen, einem Triebkopf und einem Wagen. Zum Geburtstag bekommt er weitere 22 Wagen geschenkt. Wir können die Teile als Glieder bezeichnen und feststellen, dass die Anzahl der Glieder verzwölffacht wurde, denn Oskar besitzt nun $12 \cdot 2$ Glieder $=$ 24 Glieder.
Auf der Schiene steht nur der Triebkopf. Zuerst verdreifacht Oskar die Anzahl der Glieder: Auf der Schiene stehen drei Glieder, ein Triebkopf und zwei Wagen. Danach verdoppelt Oskar diese Anzahl. Nun steht ein Zug mit 6 Gliedern auf den Schienen. Die gesamte Handlung entsteht durch Hintereinanderausführen einer Verdreifachung und einer Verdopplung der Anzahl der Glieder. Diese Handlung wird durch $1 \cdot 2 \cdot 3$ beschrieben. $2 \cdot 3 = 6$ ist zu entnehmen, dass es auch eine einzige Handlung gibt, die zu Oskars Handlungen gleichwertig ist: Oskar hat die Anzahl der Glieder versechsfacht.
Oskar kann sein Spiel interessanter gestalten. Er kann die Anzahl der Glieder verändern und er kann zusätzlich die Richtung des Triebkopfes ändern: Der Triebkopf steht auf der Schiene. Oskar dreht den Triebkopf um und hängt zwei Wagen an. Die Zahl –3 ist geeignet, diese Handlung zu beschreiben: Das Vorzeichen erfasst die Richtungsänderung, der Betrag beschreibt die Veränderung der Anzahl der Glieder. Oskar ändert diesen Zug, die Änderung wird durch –2 beschrieben: Oskar dreht den Zug und verdoppelt die Anzahl der Glieder. Der gesamte Vorgang kann durch $(-2) \cdot (-3)$ erfasst werden. Insgesamt steht der Zug in der ursprünglichen Richtung und die Anzahl der Teile ist versechsfacht. Das Vorzeichen + steht dafür, dass die Richtung nicht verändert wird. So ergibt sich $(-2) \cdot (-3) = +6$.
Der Triebkopf steht auf der Schiene. Oskar ändert die Richtung, überlegt und ändert wieder die Richtung. Der Triebkopf steht in der ursprünglichen Richtung. Das bedeutet: $(-1) \cdot (-1) = +1$.
Der Triebkopf steht auf der Schiene. Oskar verdreifacht die Anzahl der Teile und ändert die Richtung des Zuges. Soll betont werden, dass zwei Handlungen nacheinander durchgeführt werden, wird das Produkt $(-1) \cdot 3$ geschrieben. Fassen wir den Vorgang als eine Handlung auf, wählen wir die Zahl –3. Dass das Ergebnis das Gleiche ist, wird durch $(-1) \cdot 3 = -3$ ausgedrückt.

Für alle Zahlen a ist $+a = (+1) \cdot a$ und $-a = (-1) \cdot a$.

Aufgabe 1:
Oskar hat eine Modelleisenbahn.
a) Auf den Schienen steht ein Zug mit 3 Gliedern. Oskar nimmt die durch +2 beschriebene Operation vor. Wie sieht der Zug nun aus? Danach nimmt er die durch –0,5 beschriebene Operation vor. Wie sieht der Zug jetzt aus?
b) Auf den Schienen steht ein Zug mit 4 Gliedern. Oskar nimmt die durch –0,5 erfasste Operation vor. Wie sieht der Zug nun aus? Welche Handlung muss er anschließend ausführen, um den ursprünglichen Zustand herzustellen?
c) Auf der Schiene stehen der Triebkopf und ein Wagen. Oskar ändert die Richtung des Triebkopfs, vervierfacht die Anzahl der Glieder und verdoppelt diese Anzahl der Glieder.
Beschreibe den neuen Zug.

Aufgabe 2:
Erzähle jeweils eine kurze Geschichte, damit die Aussage plausibel wird.

a) $(+3) \cdot (+4) = +12$
b) $(+3) \cdot (-4) = -12$
c) $(-4) \cdot (+3) = -12$
d) $(-3) \cdot (-4) = +12$
e) $(-1) \cdot (+2) \cdot (-1) = +2$
f) $(+12) \cdot (-1) \cdot (-1) = +12$

Positive und negative Zahlen	1.15
Arbeitsblatt 4 (2)	M13

Aufgabe 3:
Herr Bauer ist Bademeister. Er füllt das Schwimmbecken. Innerhalb einer Sekunde werden 1 hl Wasser in das Becken gepumpt. Herr Bauer filmt den Vorgang.
a) Bei der Vorführung lässt er den Film mit doppelter Geschwindigkeit rückwärts laufen. Es wird der durch –2 erfasste Vorgang gezeigt. Beschreibe diesen.
b) Michael filmt die Leinwand und lässt seinen Film bei der Vorführung mit der halben Geschwindigkeit laufen. Das Ergebnis kann durch $(+0{,}5) \cdot (-2)$ beschrieben werden. Was wird beobachtet?

Regeln zur Multiplikation zweier Zahlen

Das Vorzeichen des Produktes entnehmen wir der folgenden Regel:
- Werden zwei Zahlen mit gleichen Vorzeichen multipliziert, so ergibt sich eine positive Zahl.
- Werden zwei Zahlen mit verschiedenen Vorzeichen multipliziert, so ergibt sich eine negative Zahl.

Den Betrag des Produktes entnehmen wir der folgenden Regel:
- Wir erhalten den Betrag des Produktes, indem wir die Beträge der Faktoren multiplizieren.

<u>Beispiel:</u> Berechne $(-8) \cdot (+12)$.
Die im Folgenden angegebenen Schritte müssen nicht hingeschrieben werden, sie sollten aber stets gedacht werden.
1. Schritt: Vorzeichen: verschieden
2. Schritt: Betrag: $8 \cdot 12 = 96$
Ergebnis: $(-8) \cdot (+12) = -96$

Aufgabe 4:
Berechne weitgehend im Kopf.
a) $(-25) \cdot (+3)$
b) $(-120) \cdot (-2)$
c) $(-2) \cdot (-3) \cdot (-5)$
d) $(+7) \cdot (-2) \cdot (-1)$
e) $(-37) \cdot (-342) \cdot 0$
f) $(+12) \cdot (-3)$
g) $-(-4)$
h) $(-1) \cdot (+4)^2$
i) $(-1)^2 \cdot (+4)^2$
j) $(+2)^2 \cdot (-1) \cdot (+3)^2$
k) $[(-5) \cdot (-2)] \cdot (+5)$
l) $(-5) \cdot [(-2) \cdot (+5)]$

Aufgabe 5:
Da die Division die Umkehrung der Multiplikation ist, gilt: Wegen $7 \cdot 2 = 14$ ist $14 : 2 = 7$.
Berechne und begründe jeweils entsprechen.
a) $(+84) : (+7)$
b) $(-84) : (-7)$
c) $(-84) : (+7)$
d) $(+84) : (-7)$
e) $(+3618) : (-18)$
f) $(-144) : (-6)$
g) $(+612) : (-6)$
h) $(-1470) : (-7)$

Aufgabe 6:
Vergleiche $(+32) : [(-4) : (-2)]$ und $[(+32) : (-4)] : (-2)$. Ist die Division assoziativ?

Aufgabe 7:
Berechne und vergleiche die Ergebnisse.
a) $(-4) \cdot [(+5) + (-7)]$ und $(-4) \cdot (+5) + (-4) \cdot (-7)$
b) $(-4) \cdot [(+5) - (-7)]$ und $(-4) \cdot (+5) - (-4) \cdot (-7)$
c) Wähle Zahlen und überprüfe, ob das Distributivgesetz gültig ist.

1.15	Positive und negative Zahlen
M14	Lösungen zu Arbeitsblatt 4 (1) und 4 (2)

Lösung 1:

a) Der Zug bestand zuerst aus 3 Gliedern, dem Triebkopf und 2 Wagen.
Nach der durch +2 beschriebene Operation besteht der Zug aus 6 Teilen, dem Triebkopf und 5 Wagen. Der Triebkopf zeigt in die alte Richtung. Nachdem auf diesen Zug die Operation –0,5 gewirkt hat, besteht der Zug aus 3 Teilen, einem Triebkopf und 2 Wagen. Überdies wurde der Zug auf den Schienen umgedreht. Es ergibt sich: $(-0{,}5) \cdot (+2) = -1$.

b) Zur durch –0,5 erfassten Operation: Der Zug wird umgedreht. Er besteht aus 2 Teilen.
Wird auf diesen Zug die durch –2 erfasste Operation angewandt, ergibt sich der ursprüngliche Zustand. Wir entnehmen: $(-2) \cdot (-0{,}5) = +1$.

c) $(+2) \cdot (+4) \cdot (-1) = -8$. Der Triebkopf zeigt in die andere Richtung und der Zug hat $8 \cdot 2$ Glieder, also den Triebkopf und 15 Wagen.

Lösung 2:

Zu f: $(-1) \cdot (-1) \cdot (+12) = +12$
Auf den Schienen stehen ein Triebkopf und ein Wagen. Oskar dreht den Zug, dreht ihn noch einmal, verzwölffacht die Anzahl der Glieder. Danach zeigt der Triebkopf auf den Schienen in die alte Richtung und der neue Zug hat 12 Glieder.

Lösung 3:

a) Innerhalb einer Sekunde werden 2 hl Wasser aus dem Becken gepumpt.
b) Innerhalb einer Sekunde wird 1 hl Wasser aus dem Becken gepumpt: $(+0{,}5) \cdot (-2) = -1$.

Lösung 4:

a) –75
b) +240
c) $(+6) \cdot (-5) = -30$
d) $(-14) \cdot (-1) = +14$
e) 0, denn $a \cdot 0 = 0$ für alle Zahlen a
f) –36
g) $-(-4) = (-1) \cdot (-4) = +4$
h) $(-1) \cdot (+4) \cdot (+4) = -16$
i) $(+1) \cdot (+16) = +16$
j) $(+4) \cdot (-1) \cdot (+9) = -36$
k) $(+10) \cdot (+5) = +50$
l) $(-5) \cdot (-10) = +50$

Lösung 5:

a) Wegen $(+12) \cdot (+7) = +84$ ist $(+84) : (+7) = +12$.
b) Wegen $(+12) \cdot (-7) = -84$ ist $(-84) : (-7) = +12$.
c) Wegen $(-12) \cdot (+7) = -84$ ist $(-84) : (+7) = -12$.
d) Wegen $(-12) \cdot (-7) = +84$ ist $(+84) : (-7) = -12$.
e) Wegen $(-201) \cdot (-18) = +3\,618$ ist $(+3\,618) : (-18) = -201$.
f) Wegen $(+24) \cdot (-6) = -144$ ist $(-144) : (-6) = +24$.
g) Wegen $(-102) \cdot (-6) = +612$ ist $(+612) : (-6) = -102$.
h) Wegen $(+210) \cdot (-7) = -1470$ ist $(-1470) : (-7) = +210$.

Lösung 6:

$(+32) : [(-4) : (-2)] = (+32) : (+2) = +16$, aber $[(+32) : (-4)] : (-2) = (-8) : (-2) = +4$
Für die Division ist kein Assoziativgesetz gültig,
denn es gibt Zahlen a, b und c mit $a : (b : c) \neq (a : b) : c$.
Man sagt dafür auch: „Die Division ist nicht assoziativ."

Lösung 7:

a) $(-4) \cdot [(+5) + (-7)] = (-4) \cdot (-2) = +8$ und $(-4) \cdot (+5) + (-4) \cdot (-7) = (-20) + (+28) = +8$
b) $(-4) \cdot [(+5) - (-7)] = (-4) \cdot (+12) = -48$
und $(-4) \cdot (+5) - (-4) \cdot (-7) = (-20) - (+28) = (-20) + (-28) = -48$
c) Distributivgesetz: Für alle Zahlen a, b und c ist stets $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.