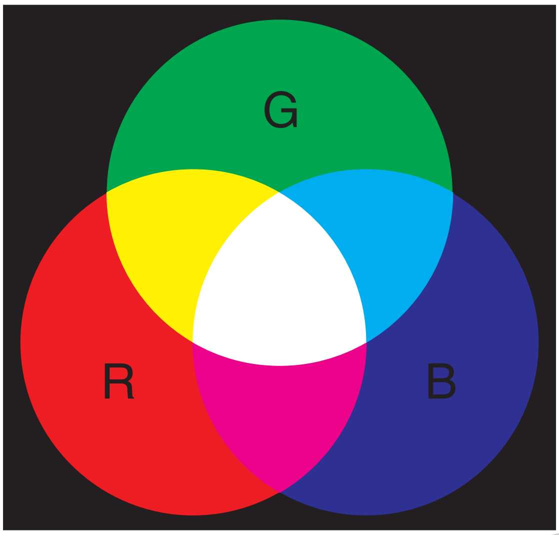
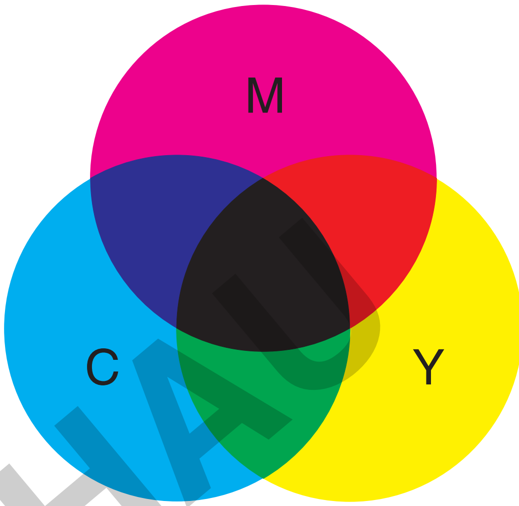
Farben und analytische Geometrie

Uwe Schürmann, Münster

RGB-Farbmodell



CMY-Farbmodell



Klasse: 11/12

Dauer: ca. 13 Stunden für das Gesamtmaterial, Materialien auch einzeln einsetzbar

Inhalt: Farbmodelle (RGB und CMY, RGBA und CMYK, YUV)
Farbvektoren und ihre Eigenschaften
geometrische Interpretation von Farben
Lösen linearer Gleichungssysteme
Bestimmen des Extremwerts einer Parabel (**M 4**)
Analytische Geometrie: Addition und Multiplikation mit einem Skalar; Skalarprodukt; Betrag; lineare Unabhängigkeit; Basis und Erzeugendensystem; Basistransformationsmatrizen und Abbildungsmatrizen; zwischen zwei Vektoren eingeschlossener Winkel

Ihr Plus:

- ✓ Motivation mathematischer Begriffe durch realistische Kontexte
- ✓ offene Aufgaben für kooperatives Lernen
- ✓ fachübergreifender Unterricht (Kunst, Informatik)
- ✓ Computereinsatz wünschenswert, jedoch nicht Voraussetzung: In **M 1** experimentieren Ihre Schüler, in **M 2/M 3** prüfen sie ihre Ergebnisse nach.

Der Kontext ***Farben*** eignet sich dazu, zentrale Begriffe der analytischen Geometrie (u. a. Vektor, lineare Abhängigkeit, Betrag eines Vektors und – unter gewissen Einschränkungen – auch Basis und Erzeugendensystem) zu motivieren und anschaulich fassbar zu machen. Verbindungen bestehen zu den Fächern Informatik und Kunst. So können Ihre Schüler im Informatikunterricht Anwendungen programmieren, in denen Farbmodelle eine Rolle spielen. Im Fach Kunst spielen Farbmodelle eine ähnlich wichtige Rolle.

Didaktisch-methodische Hinweise

Einsatzmöglichkeiten: zur Einführung oder zur Wiederholung

Die Materialien dieses Beitrages können Sie auf vielfältige Weise im Themenbereich **Analytische Geometrie** einsetzen. So können Sie zentrale Begriffe der Vektorrechnung einführen. Ebenso eignen sich die Materialien aber auch dazu, bereits eingeführte Begriffe und Rechenverfahren in sinnstiftenden realen **Kontexten** zu erproben. Des Weiteren können Sie die Materialien einzeln, als Ergänzung zum normalen Unterricht, verwenden. Dabei wird jedoch Material **M 1** stets als **Einführung** eingesetzt.

Die Mathematik in diesem Beitrag auf einen Blick

Folgende Teile der analytischen Geometrie der Oberstufe werden abgedeckt:

- Addition und skalare Multiplikation von Vektoren
- Lineare Unabhängigkeit
- Betrag eines Vektors (Länge und Abstand)
- Winkel und Skalarprodukt
- Basen und Erzeugendensysteme
- Abbildungsmatrizen (inklusive inverse Matrizen)

Lediglich Lageprobleme (Punkt zu Gerade, Gerade zu Ebene etc.) und Ebenen können durch den Kontext nicht sinnvoll motiviert werden.

Denken in mathematischen Kontexten

Die Unterrichtsreihe verfolgt den Anspruch, Ihre Schüler dazu zu befähigen, mathematische Begriffe und Verfahrensweisen selbstständig in realen Situationen anwenden zu können. Ihr Schwerpunkt liegt daher weniger auf dem bloßen Einüben schematischer Rechenwege. Vielmehr verlangt sie von Ihren Schülern, eigenständig (verschiedene) Verfahren zu entwickeln und diese zu begründen.

Neben dem Entwickeln und Begründen mathematischer Verfahren bieten die Materialien auch vielfältige Anlässe, mit Mathematik im gegebenen Kontext zu experimentieren. So erstellen und mischen Ihre Schüler Farben oder wandeln ein farbiges in ein Schwarz-Weiß-Bild um. Daraus folgend eignen sich die Materialien insbesondere für solche Sozialformen des Unterrichts, bei denen Ergebnisse gemeinsam entwickelt und diskutiert werden.

Nutzen Sie die Möglichkeiten des Computers

Das Material ist angereichert mit Möglichkeiten für den **Computereinsatz** im Unterricht oder in Hausaufgaben. Dabei sind die Beispiele so gewählt, dass sie mit möglichst geringem Aufwand realisiert werden können. D. h., es werden keine speziellen Softwarekenntnisse vorausgesetzt, und Sie und Ihre Schüler können sich ganz auf die Mathematik konzentrieren. Man benötigt nur einen Texteditor und einen Browser. Grundkenntnisse in **HTML** sind für Material **M 1** wünschenswert, jedoch nicht notwendig. Bei den meisten anderen Materialien ist es denkbar, auf den Computereinsatz gänzlich zu verzichten.

Bezug zu den Bildungsstandards der Kultusministerkonferenz

Allg. mathematische Kompetenz	Leitidee	**Inhaltsbezogene Kompetenzen** Die Schüler ...	Anforderungsbereich
K 3, K 4, K 5	L 1	... beschreiben einfache Sachverhalte mit Tupeln (**M 1, M 2**),	I/ II
K 1, K 3, K 5	L 1, L 3	... wählen geeignete Verfahren zur Lösung von Gleichungen und Gleichungssystemen aus, führen elementare Operationen mit geometrischen Vektoren aus und untersuchen Vektoren auf Kollinearität (**M 3**),	I/ II
K 2, K 3	L 2, L 3	... deuten das Skalarprodukt geometrisch, ... bestimmen Streckenlängen und Winkelgrößen im Raum auch mithilfe des Skalarprodukts, ... ermitteln Abstände zwischen Punkten und Geraden (**M 4–M 6**),	II
K 1, K 5, K 6	L 1, L 3	... führen elementare Operationen mit geometrischen Vektoren aus und beschreiben mathematische Prozesse durch Matrizen unter Nutzung der Matrizenmultiplikation (**M 7–M 9**),	I–III
K 2, K 3, K 4	L 3	... wenden die Vektoraddition und -multiplikation an (**M 10**),	II
K 3, K 4	L 1	... beschreiben einfache Sachverhalte und mathematische Prozesse durch Matrizen unter Nutzung von Matrizenmultiplikation und inversen Matrizen (**M 11**).	I–III

Abkürzungen

Kompetenzen

K 1 (Mathematisch argumentieren); K 2 (Probleme mathematisch lösen); K 3 (Mathematisch modellieren); K 4 (Mathematische Darstellungen verwenden); K 5 (Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen); K 6 (Kommunizieren)

Leitideen

L 1 (Zahl und Zahlbereich); L 2 (Messen und Größen); L 3 (Raum und Form); L 4 (Funktionaler Zusammenhang); L 5 (Daten und Zufall)

Anforderungsbereiche

I Reproduzieren; II Zusammenhänge herstellen; III Verallgemeinern und Reflektieren

II/B

Auf einen Blick

Einführung von Farben als Vektoren

Material	Thema	Stunde
M 1 (2 Seiten)	**Vektoren addieren und die Multiplikation mit einem Skalar** Als Einführung in Vektoraddition und skalare Multiplikation geeignet, Medieneinsatz empfohlen, Aufgabe 1 ist im Ergebnis offen. Erfassen einer HTML-Datei	1.
M 2 (Fo)	**Farben-Quiz** RGB-Farbmodell besser verstehen, Vektoren und Farben visuell verbinden	

Lineare Unabhängigkeit interpretiert als Mischen von Farben

Material	Thema	Stunde
M 3	**Farben mischen – lineare Unabhängigkeit von Vektoren** Farben im Malkasten und im RGB-Farbmodell als einem Modell für lineare Unabhängigkeit mischen, geeignet als Einführung der linearen Unabhängigkeit, Medieneinsatz zur Visualisierung möglich, geeignet für kooperatives und geleitetentdeckendes Lernen Alle Farben, deren Vektoren auf der Ebene liegen, die durch die beiden zu mischenden Farbvektoren aufgespannt wird, können gemischt werden.	2.

Eigenschaften von Farben

Material	Thema	Stunde
M 4	**Helligkeit und Farbigkeit – Länge, Betrag, Skalarprodukt** Aufgabe 1 a) im Lösungsweg und im Ergebnis offen, Aufgabe 2 c) im Lösungsweg offen und besonders geeignet, verschiedene Themengebiete zu verknüpfen (Vektorrechnung, Satz von Pythagoras, Sinus und Kosinus), geeignet für kooperatives Lernen, Medieneinsatz zur Visualisierung möglich	3.–6.
M 5	**Farben vergleichen – Abstand, Länge, Winkel** Interpretation von Punkten auf einer Geraden als Farben mit demselben Farbton, Motivation der Einführung von Winkeln, Motivation der Einführung von Abstand zweier Punkte, auch als Wiederholung bisheriger Verfahren geeignet, Medieneinsatz zur Visualisierung möglich	
M 6	**Schwarz-Weiß-Bilder – Länge und Skalarprodukt** Aufgabe 1 im Lösungsweg offen, geeignet für kooperatives Lernen, Medieneinsatz: Praxistest der Berechnungen möglich durch Ausdrucken in Schwarz-Weiß	

Wechsel zwischen verschiedenen Farbmodellen

Material	Thema	Stunde
M 7 (Fo)	**CMY- und RGB-Modell im Vergleich**	7./8.
M 8	**Vom Bildschirm zum Drucker – Transformationsmatrizen** Als Motivation und Einführung von Basistransformationen geeignet	
M 9	**Weitere Farbmodelle – Basen und Erzeugendensysteme** Anschauliche Interpretation von Basen und Erzeugendensystemen, wenig rechnen – viel begründen, geeignet für kooperatives Lernen oder Rechercheaufträge	
M 10	**Das RGBA-Farbmodell – Farbmodell mit Transparenz** Vierdimensionales Farbmodell – anschaulich fassbar, Vektoraddition und -multiplikation	

Bilder bearbeiten mit SVG-Dateien

Material	Thema	Stunde
M 11	**Eigene Bilder bearbeiten – Abbildungsmatrizen** Computereinsatz empfohlen, im Lösungsweg und im Ergebnis offene Aufgaben, geeignet für kooperatives Lernen, Verkettung von Matrizen, inverse Matrix im Kontext „Farben" interpretieren, vorherige Einführung von affinen Abbildungen hilfreich, jedoch nicht Voraussetzung	9.–11.

Lernerfolgskontrolle

Material	Thema	Stunde
M 12 (LEK)	**Farben und Analytische Geometrie – LEK** Aufgaben für einen Test	12./13.

Minimalplan

Die Arbeitsblätter sind, sofern das zugrunde liegende Farbmodell verstanden worden ist, unabhängig voneinander. Wird in Ihrem Kurs ein bestimmtes Thema nicht behandelt oder möchten Sie bei einem bestimmten Thema nicht auf den Kontext „Farben" zurückgreifen, so kann das entsprechende Material problemlos ausgelassen werden.

M 1 Fortsetzung (Aufgaben)

Aufgabe 1: Farben erstellen

b) Ändern Sie die Hintergrundfarbe in der HTML-Datei.

Erstellen Sie durch Ausprobieren folgende Farben:

I) ein schönes Rosa

II) ein kühles Blau

III) ein dunkler Grauton

IV) ein schokoladiges Braun

Tipp

© Thinkstock / iStock

Alternativ können Sie auch die App ***RGB Color Mixer*** für Android-Geräte oder ***Color Mix Flash*** für Apple-Geräte herunterladen. Beide sind **kostenlos** und ermöglichen es, auf einfache Weise Farben im RGB-Modell zu erstellen.

Aufgabe 2: Farben mischen

Mischen Sie die folgenden Farben in den jeweiligen Anteilen:

a)

2 Teile der Farbe $\vec{f}_1 = \begin{pmatrix} 90 \\ 80 \\ 0 \end{pmatrix}$ *und* *2 Teile der Farbe* $\vec{f}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 20 \\ 255 \end{pmatrix}$.

b)

1 Teil der Farbe $\vec{f}_1 = \begin{pmatrix} 255 \\ 200 \\ 200 \end{pmatrix}$,

2 Teile der Farbe $\vec{f}_2 = \begin{pmatrix} 255 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ *und*

3 Teile der Farbe $\vec{f}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 100 \end{pmatrix}$.

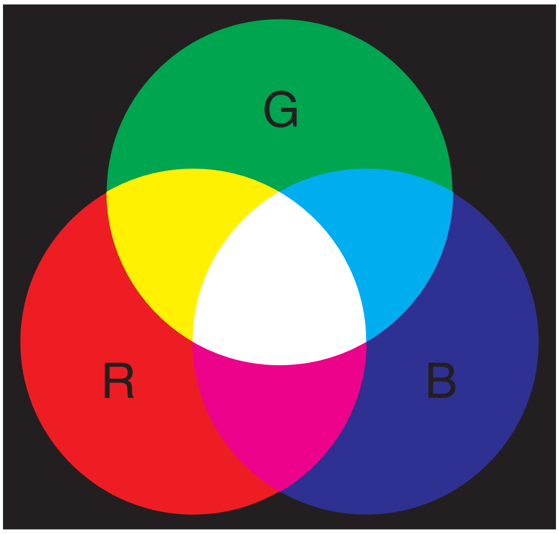
c) 2 Teile Weiß und 4 Teile Rot.

d) 4 Teile Gelb und 2 Teile Rot.

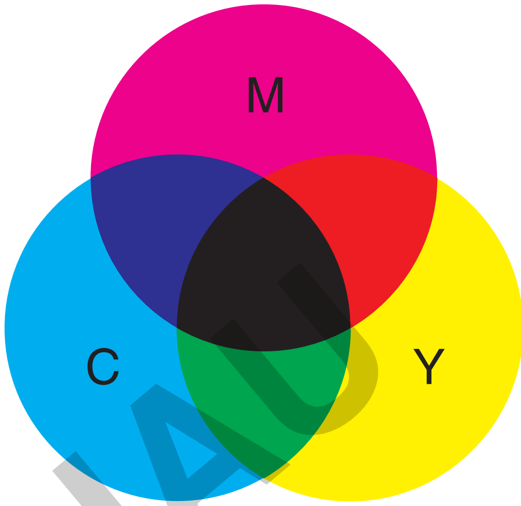
Tipp Das Ergebnis können Sie sich wieder mittels der HTML-Datei verdeutlichen oder mit den in Aufgabe 1 genannten Apps für mobile Endgeräte.

M 7 CMY- und RGB-Modell im Vergleich

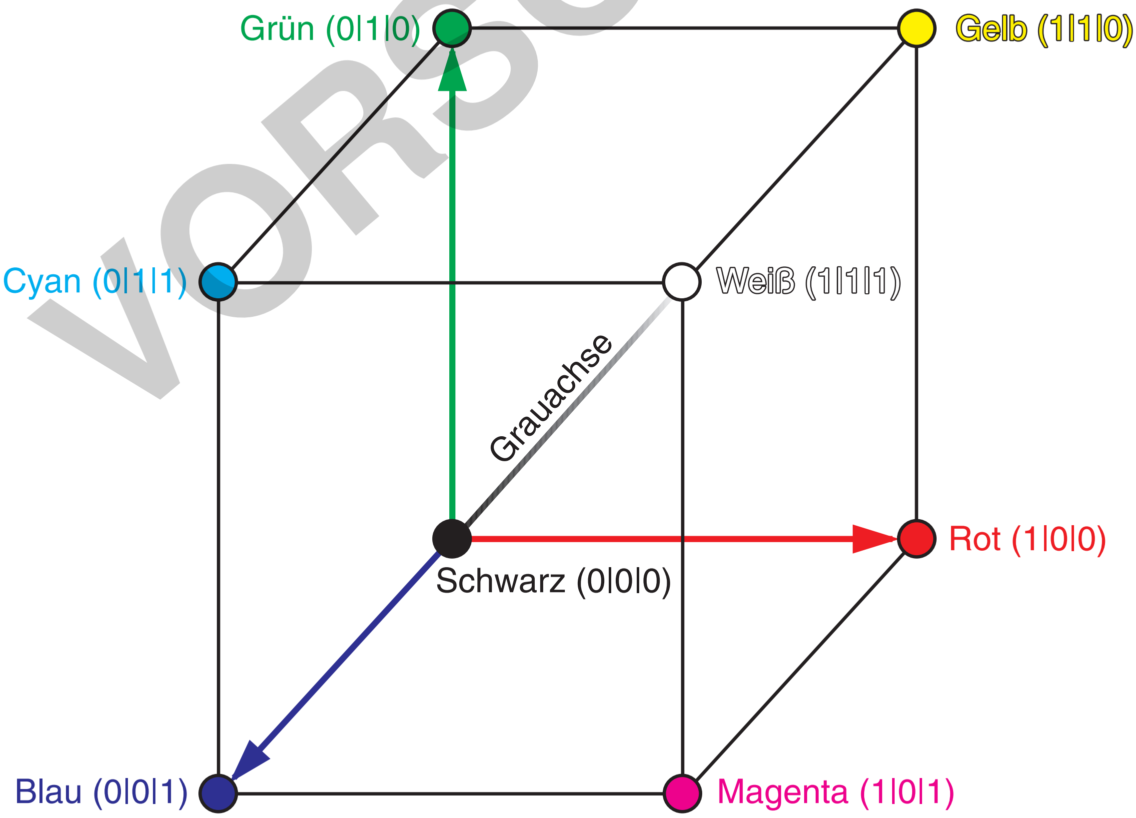
RGB-Farbmodell



CMY-Farbmodell



RGB- und CMY-Modell in einem Farbwürfel



M 10 Das RGBA-Farbmodell – Farbmodell mit Transparenz

Beim RGBA-Farbmodell handelt es sich um das um einen Kanal erweiterte RGB-Modell, wobei A nicht etwa für eine weitere Information bezüglich der Farbe oder der Helligkeit steht, sondern für einen **Alphawert**, der Auskunft über die Deckkraft oder umgekehrt die Transparenz gibt. Bilddateien kennen Transparenz, wenn Sie in diesem Farbmodell arbeiten.

Das Modell findet Anwendung z. B. in der Bildbearbeitung, wenn ein Objekt in eine Szenerie eingefügt werden soll. Bei der Erstellung **dreidimensionaler Computergrafiken** spielt das Modell ebenfalls eine tragende Rolle. So lässt sich z. B. Nebel darstellen, farbiger Raum, der zum Teil durchsichtig ist, oder Fensterscheiben, die einen Teil des Lichtes reflektieren. Die Farbe eines Pixels wird in diesem Modell dann durch die Überlagerung verschiedener Farbvektoren gebildet.

Aufgabe: Bild in einen Hintergrund einfügen

In einen weißen Hintergrund mit hundertprozentiger Deckkraft soll ein teilweise transparentes Bild eingefügt werden.

Stellen Sie mathematisch dar, wie die folgenden Bildpunkte auf dem Bildschirm durch Farbvektoren aus dem RGB-Farbmodell dargestellt werden. Gehen Sie dafür davon aus, dass die Koeffizienten für die Werte von RGBA stehen und zwischen 0 und 1 liegen.

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}0{,}5\\0{,}1\\0{,}6\\0{,}5\end{pmatrix};\quad \vec{b}=\begin{pmatrix}0{,}3\\0{,}08\\0{,}4\\1\end{pmatrix};\quad \vec{c}=\begin{pmatrix}0\\0{,}1\\0{,}6\\0{,}2\end{pmatrix};\quad \vec{d}=\begin{pmatrix}0\\0{,}1\\0\\0{,}7\end{pmatrix}$$

Tipp Es gilt: $\vec{u}_{rgb}=\alpha\cdot V+(1-\alpha)\cdot H$, wobei α = Alphawert, V = Vordergrundfarbe, H = Hintergrundfarbe und $\vec{u}_{rgb}$ = Farbvektor im RGB-Modell.

M 11 Eigene Bilder bearbeiten – Abbildungsmatrizen

Entnehmen Sie der beiliegenden **CD-ROM 57** die Datei ***Vorlage.svg***. Speichern Sie die Datei auf dem Computer. Nun wählen Sie ein eigenes Bild im Format *JPG*, das Sie gerne bearbeiten möchten. (Keine Angst: Das originale Bild wird nicht verändert.) Speichern Sie das Bild unter dem Namen **MeinBild.jpg** im selben Ordner wie die SVG-Datei. (Alternativ können Sie auch die Bilddatei **MeinBild.jpg** von der **CD-ROM 57** verwenden.) Öffnen Sie die SVG-Datei einmal mit einem Browser (z. B. Firefox) und einmal mit einem Texteditor (Rechtsklick > Öffnen mit).

Im Texteditor sehen Sie den Inhalt der Datei. Konzentrieren Sie sich nur auf die Matrix M, die restlichen Angaben müssen Sie nicht interessieren. Mit der Matrix M wird die Farbe $\vec{f}$ eines jeden Pixels Ihres Bildes bearbeitet, indem $M\cdot\vec{f}=\vec{f}_2$ berechnet wird. Die Pixel Ihres Bildes werden im RGBA-Farbmodell mit Werten zwischen 0 und 1 dargestellt.

Um wirklich viele verschiedene Abbildungen mit nur einer Matrix realisieren zu können, hatten die Entwickler des SVG-Standards folgende **Idee**: Jedem Farbvektor wird neben den Koeffizienten R, G, B und A noch eine 1 angehängt. Die Vektoren werden dann mit einer 5x5-Abbildungsmatrix multipliziert. Mit den Koeffizienten in der letzten Spalte realisiert man die Verschiebung, die ansonsten durch die Addition mit einem Vektor verwirklicht werden würde.

$$\left|\vec{b}-\vec{c}\right| = \left|\begin{pmatrix}90\\23\\110\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\110\\150\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}90\\-87\\-40\end{pmatrix}\right| = \sqrt{90^2+(-87)^2+(-40)^2} = \sqrt{17\,269} \approx 131{,}41157$$

$$\left|\vec{a}-\vec{c}\right| = \left|\begin{pmatrix}120\\30\\150\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\110\\150\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}120\\-80\\0\end{pmatrix}\right| = \sqrt{120^2+(-80)^2+0^2} = \sqrt{20\,800} \approx 144{,}222$$

Antwort: Farbe a und b sind sich am ähnlichsten, weil der Abstand ihrer Farborte (Punkte) am geringsten ist.

Aufgabe 3: Berechnung des Unterschieds zwischen zwei Farbtönen

b)

$$\cos\varphi_1 = \frac{\begin{pmatrix}120\\30\\150\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}90\\23\\110\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}120\\30\\150\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}90\\23\\110\end{pmatrix}\right|} = \frac{120\cdot 90+30\cdot 23+150\cdot 110}{\sqrt{120^2+30^2+150^2}\cdot\sqrt{90^2+23^2+110^2}}$$

$$= \frac{27\,990}{\sqrt{37\,800}\cdot\sqrt{20\,729}} \approx 0{,}999926 \quad\Rightarrow\quad \varphi_1 = \measuredangle_{\vec{a};\vec{b}} \approx 0{,}7°$$

$$\cos\varphi_2 = \frac{\begin{pmatrix}120\\30\\150\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\110\\150\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}120\\30\\150\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}0\\110\\150\end{pmatrix}\right|} = \frac{120\cdot 0+30\cdot 110+150\cdot 150}{\sqrt{120^2+30^2+150^2}\cdot\sqrt{0^2+110^2+150^2}}$$

$$= \frac{25\,800}{\sqrt{37\,800}\cdot\sqrt{34\,600}} \approx 0{,}713404 \quad\Rightarrow\quad \varphi_2 = \measuredangle_{\vec{a};\vec{c}} \approx 44{,}5°$$

$$\cos\varphi_3 = \frac{\begin{pmatrix}90\\23\\110\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\110\\150\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}90\\23\\110\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}0\\110\\150\end{pmatrix}\right|} = \frac{90\cdot 0+23\cdot 110+110\cdot 150}{\sqrt{90^2+23^2+110^2}\cdot\sqrt{0^2+110^2+150^2}}$$

$$= \frac{19\,030}{\sqrt{20\,729}\cdot\sqrt{34\,600}} \approx 0{,}710578 \quad\Rightarrow\quad \varphi_3 = \measuredangle_{\vec{b};\vec{c}} \approx 44{,}7°$$

Antwort:

Die Farbtöne von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind sich am ähnlichsten, da der von ihnen eingeschlossene Winkel am kleinsten ist.