Download

Otto Mayr

Hausaufgaben: Geometrie

Üben in drei Differenzierungsstufen

Downloadauszug
aus dem Originaltitel:

Hausaufgaben: Geometrie

Üben in drei Differenzierungsstufen

Volumen der Kugel

★ **1. Ergänze die fehlenden Größen und berechne das Volumen der Kugel in der geforderten Maßeinheit.**

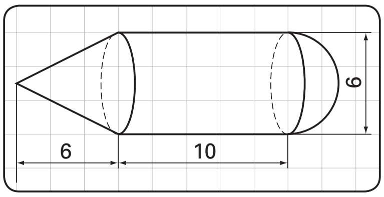
Runde jeweils auf zwei Dezimalstellen.

Radius	6 cm		4 m	
Durchmesser		10 dm		24 mm
Volumen	cm^3	dm^3	dm^3	cm^3

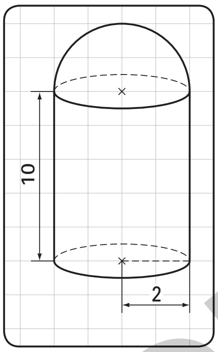
★★ **2. Berechne die Volumina der abgebildeten Werkstücke.**

Runde die Ergebnisse auf zwei Dezimalstellen.

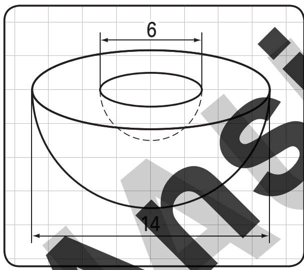
a)



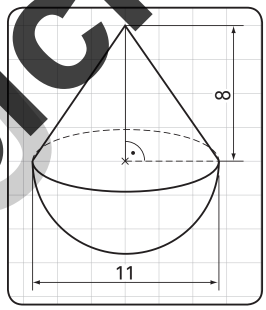
b)



c)



d)



★★ **3. Eine Kugel hat ein Volumen von 3 052,08 cm^3.**

Passt sie in eine würfelförmige Verpackung mit einem Volumen von 4 913 cm^3?

★★ **4. Wie schwer ist eine Kugel aus Eisen bei einem Radius von 6 cm?**

Dir fehlt eine Angabe.

★★ **5. Eine Kugel (d = 24 cm) wiegt 20 256,768 g.**

a) Aus welchem Material besteht die Kugel?
b) Könntest du die Kugel tragen, wenn sie aus Blei bestehen würde?

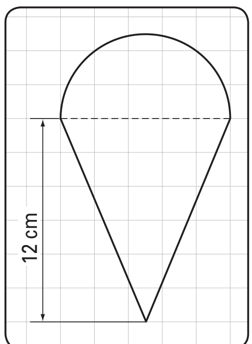
Suche im Mathebuch.

★★ **6. Eine Kugel, die innen hohl ist, hat einen äußeren Radius von 18 cm und einen inneren Radius von 16,5 cm.**

a) Wie groß ist das Volumen der Wandung?
b) Wie viel Prozent des Gesamtvolumens nimmt die Wandung ein? Runde auf ganze Prozent.

★★★ **7. Ein Werkstück aus Eichenholz (siehe Längsschnittskizze) besteht aus einem Kegel mit einer aufgesetzten Halbkugel.**

Die Grundfläche des Kegels und die Halbkugel haben den gleichen Radius.
Berechne die Masse des Werkstücks, wenn das Volumen des Kegels 803,84 cm^3 beträgt. Eichenholz hat die Dichte 0,8 g/cm^3.
Runde alle Ergebnisse auf eine Dezimalstelle.



→ *Lösungen zu 2, 4, 6 und 7*

142,35 661,49 23 5 609,61 395,64 1500,5 7053,696 601,57

★ **1. Ergänze die fehlenden Größen und berechne die Oberfläche der Kugel in der geforderten Maßeinheit.**

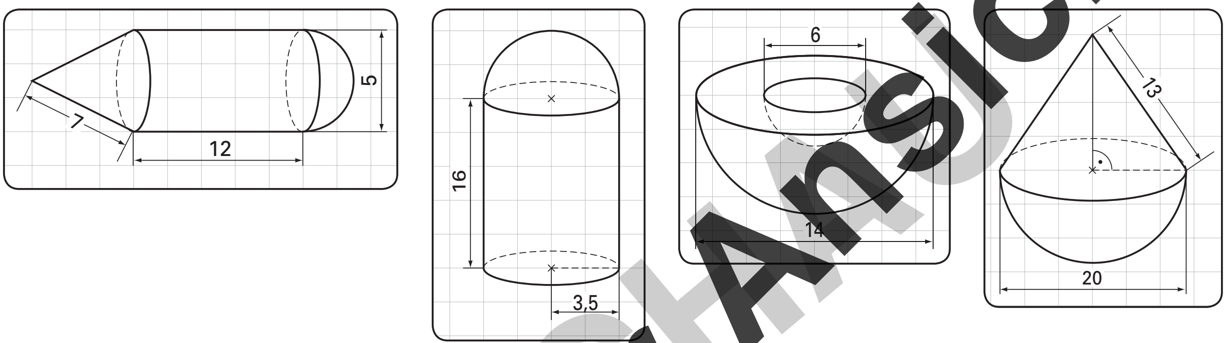
Runde jeweils auf zwei Dezimalstellen.

Radius	10 cm		7 dm	
Durchmesser		18 dm		32 mm
Volumen	cm^2	cm^2	m^2	cm^2

★★ **2. Berechne die Oberflächen der abgebildeten Werkstücke.**

Runde die Ergebnisse auf zwei Dezimalstellen.

a) b) c) d)



★★ **3. Ein kugelförmiger Behälter hat eine Oberfläche von 2 461,76 cm^2.**

Wie viele Liter passen in diesen Behälter?

★★ **4. Eine Eisenkugel wird in einem zylinderförmigen Wasserbehälter gelegt und taucht im Wasser vollständig unter.**

Der Durchmesser des Zylinders beträgt 12 cm, der Wasserspiegel steigt um 3 cm an.

a) Wie groß ist der Durchmesser der Kugel?

b) Mit welchen Materialien sind solche Aufgabenstellungen nur möglich?

Beschreibe ein Beispiel, bei der diese Form der Aufgabenstellung nicht möglich ist und begründe deine Antwort.

d muss < 12 cm sein.

★★★ **5. Eine größere Kugel hat den dreifachen Durchmesser einer kleineren Kugel.**

Kreuze die richtigen Aussagen an.

Drei Aussagen sind richtig.

- ☐ Die Oberfläche der kleineren Kugel beträgt ein Sechstel der Oberfläche der größeren Kugel.
- ☐ Die Hälfte des Durchmessers der größeren Kugel entspricht dem dreifachen Radius der kleineren Kugel.
- ☐ Die Oberfläche der größeren Kugel ist neunmal so groß wie die Oberfläche der kleineren Kugel.
- ☐ Das Volumen der kleineren Kugel beträgt ein Drittel des Volumen der größeren Kugel.
- ☐ Das kleinste ganzzahlige Verhältnis der Volumina beträgt 9 : 1.
- ☐ Das Volumen der größeren Kugel ist 27-mal so groß wie das der kleineren Kugel.

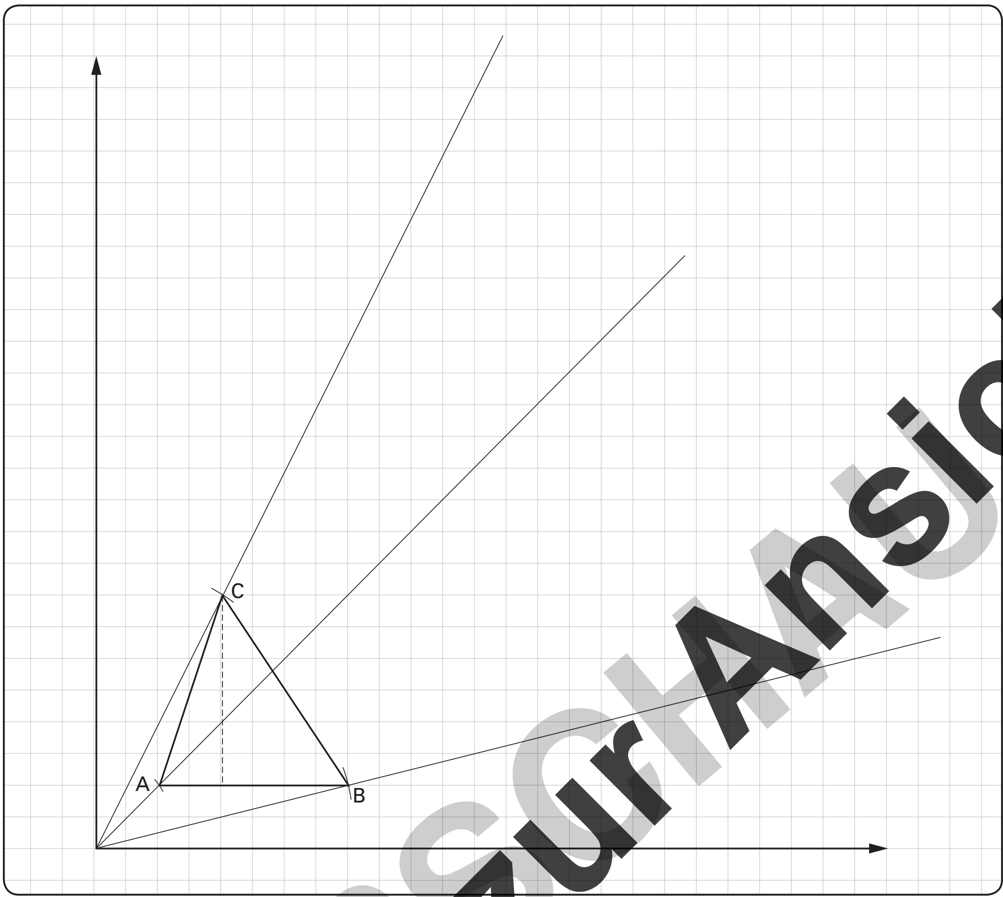
➔ *Lösungen zu 2, 3 und 4a*

282,60 8,6 467,08 489,84 1 036,20 11,488213

Zentrische Streckung

1. Vergrößere das abgebildete Dreieck mit dem Streckungsfaktor 3.

Das Streckungszentrum liegt bei (0|0).



2. Vergleiche die beiden entstandenen Dreiecke und

a) begründe die Formel $A' = A \cdot k^2$ anhand der beiden Dreiecke.
b) beurteile die folgenden Aussagen mit „richtig“ (r) oder „falsch“ (f).

Drei Aussagen sind falsch.

$AB \parallel A'B'$	$BC = B'C'$	$\sphericalangle ACB = \sphericalangle A'C'B'$
$h_c : h_c' = 1 : 3$	$A(A'B'C') = A(ABC) \cdot 9$	
$\beta = \alpha'$	$A'C' : 3 = AC$	$AB \parallel A'C'$

3. Ein Bild der Größe 32 cm x 20 cm wird gerahmt.

Der Rahmen ist 4 cm breit.
Sind ungerahmtes und gerahmtes Bild zueinander ähnlich? Überprüfe durch Rechnung.

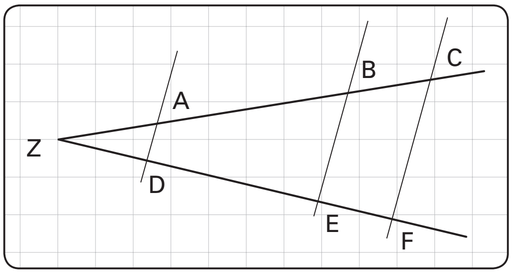
Beachte das Verhältnis der Seiten. Eine Skizze ist immer hilfreich.

4. Der Radius eines Kreises wird mit einem Faktor k vergrößert.

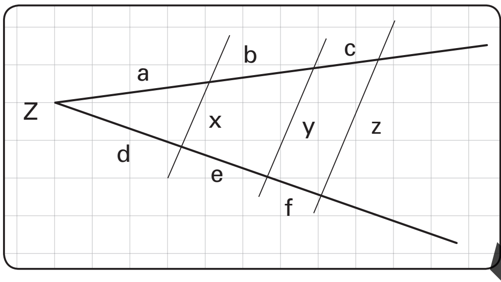
Die entstandene Fläche beträgt nun 63,585 cm^2. Berechne den Streckungsfaktor, wenn der Durchmesser des ursprünglichen Kreises 6 cm betrug.
Zeichne die beiden Kreise in der Originalgröße.

★ **1. Ergänze die Gleichungen.**

a)



b)



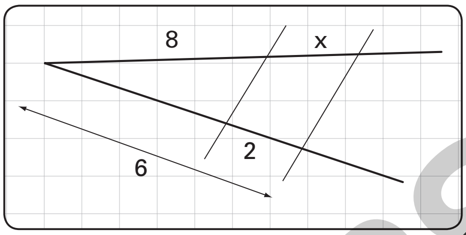
$\frac{ZA}{ZB} = \underline{\qquad}$ $\frac{AC}{AB} = \frac{\underline{\qquad}}{DE}$ $\frac{a}{x} = \frac{a+b}{\underline{\qquad}}$ $\frac{y}{d+e} = \frac{\underline{\qquad}}{d+e+f}$

$\frac{ZB}{\underline{\qquad}} = \frac{ZE}{ZF}$ $\underline{\qquad} = \frac{ZF}{ZD}$ $\frac{\underline{\qquad}}{z} = \frac{d}{x}$ $\frac{a+b+c}{z} = \frac{\underline{\qquad}}{y}$

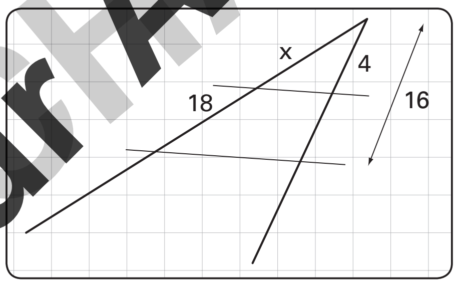
★★ **2. Berechne x.**

Es gibt jeweils vier verschiedene Möglichkeiten.

a)



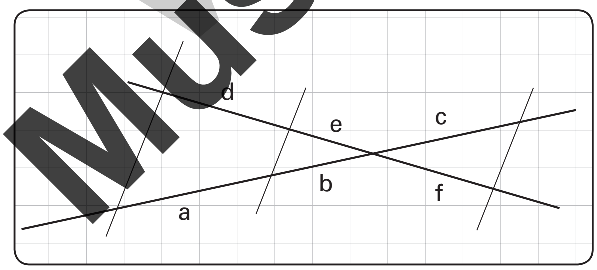
b)



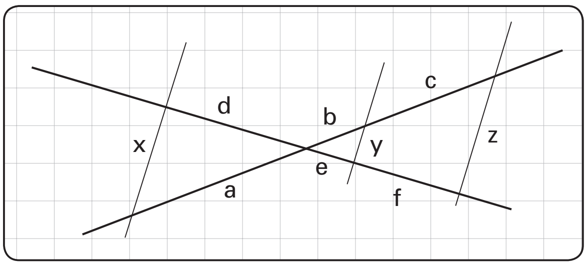
★★ **3. Richtig (r) oder falsch (f)?**

5x richtig und 3x falsch.

a)



b)



$\frac{a+b}{c} = \frac{d+e}{f}$ $\frac{x}{d} = \frac{y}{e}$

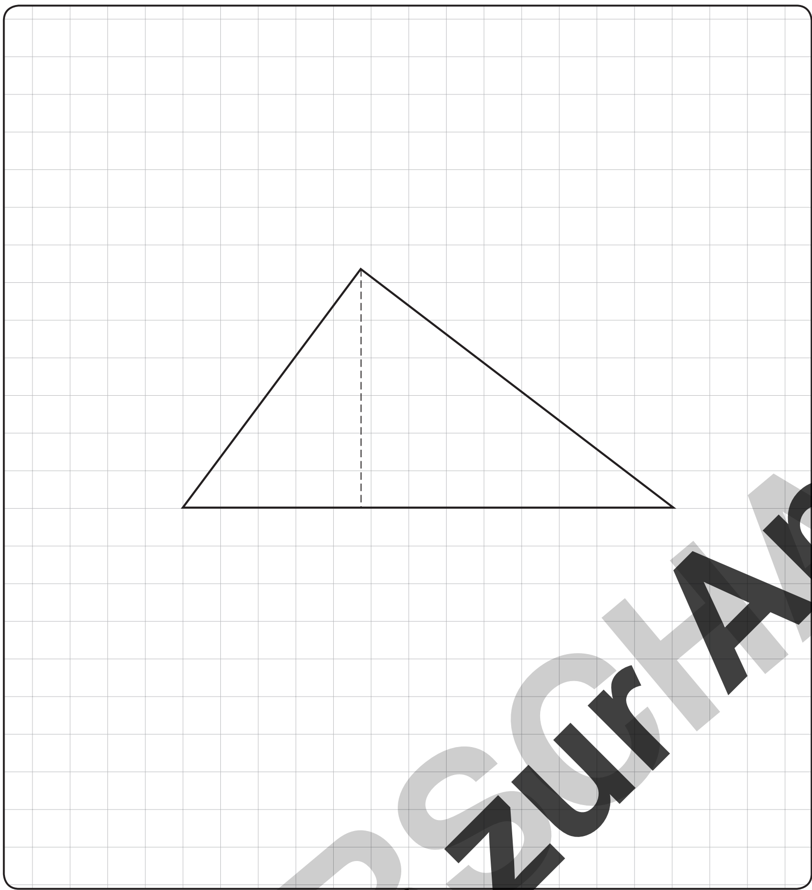
$\frac{b}{c} = \frac{e}{f}$ $\frac{d+e+f}{y} = \frac{c+b+a}{x}$

$\frac{d+e}{c} = \frac{a+b}{f}$ $\frac{x}{a+b} = \frac{z}{e+d}$

$\frac{f}{d} = \frac{c}{a}$ $\frac{y}{b+a} = \frac{y}{e+a}$

1. Zeige anhand von Zeichnung und Rechnung, dass die Kathetensätze gelten.

Benenne die jeweiligen Strecken und Flächen.
Entnimm die fehlenden Maße der Zeichnung. Miss dabei möglichst genau.
Führe dann den rechnerischen Nachweis. Runde sinnvoll.

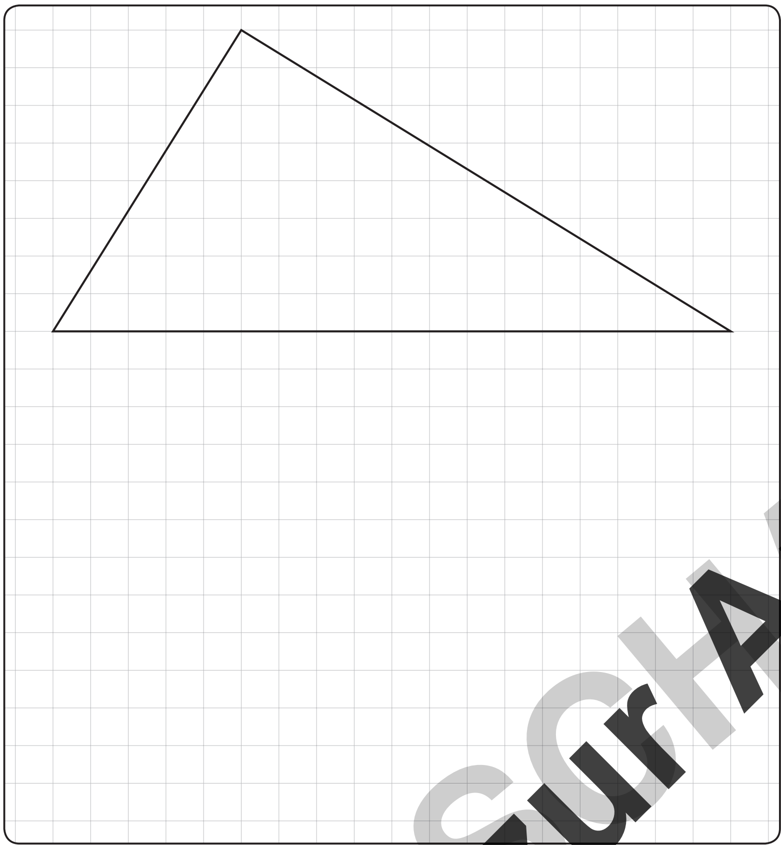


$b^2 = c \cdot q$ $a^2 = c \cdot p$

$b^2 =$ $a^2 =$

1. Zeige anhand von Zeichnung und Rechnung, dass der Höhensatz gilt.

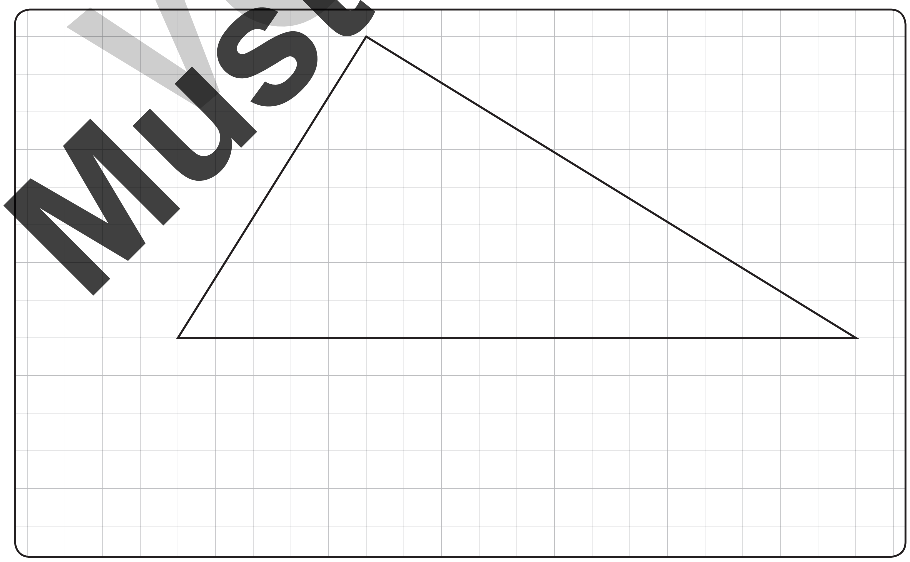
Benenne die jeweiligen Strecken und Flächen. Entnimm fehlende Maße der Zeichnung so genau wie möglich. Runde sinnvoll.
Zeichne das Quadrat über die Höhe nach rechts, das Rechteck nach links.



$h^2 = q \cdot p$

2. Zeige den Höhensatz wie oben.

Zeichne das Quadrat über die Höhe nach links, das Rechteck nach rechts.



$h^2 = p \cdot q$

Volumen der Kugel

1. a) $d = 12\text{ cm};\ V = \frac{4}{3} \cdot (6\text{ cm})^3 \cdot 3{,}14 = \underline{\underline{904{,}32\text{ cm}^3}}$

b) $r = 5\text{ dm};\ V = \frac{4}{3} \cdot (5\text{ dm})^3 \cdot 3{,}14 \approx \underline{\underline{523{,}33\text{ dm}^3}}$

c) $d = 8\text{ m};\ V = \frac{4}{3} \cdot (4\text{ m})^3 \cdot 3{,}14 \approx 267{,}95\text{ m}^3 = \underline{\underline{267\,950\text{ dm}^3}}$

d) $r = 12\text{ mm};\ V = \frac{4}{3} \cdot (12\text{ mm})^3 \cdot 3{,}14 = 7\,234{,}56\text{ mm}^3 = \underline{\underline{7{,}23\text{ cm}^3}}$

2. a) $V = \frac{\frac{4}{3} \cdot (3\text{ cm})^3 \cdot 3{,}14}{2} + (3\text{ cm})^2 \cdot 3{,}14 \cdot 10\text{ cm} + \frac{(3\text{ cm})^2 \cdot 3{,}14 \cdot 6\text{ cm}}{3}$
$= 56{,}52\text{ cm}^3 + 282{,}6\text{ cm}^3 + 56{,}52\text{ cm}^3 = \underline{\underline{395{,}64\text{ cm}^3}}$

b) $V = (2\text{ cm})^2 \cdot 3{,}14 \cdot 10\text{ cm} + \frac{\frac{4}{3} \cdot (2\text{ cm})^3 \cdot 3{,}14}{2}$
$= 125{,}6\text{ cm}^3 + 16{,}75\text{ cm}^3 = \underline{\underline{142{,}35\text{ cm}^3}}$

c) $V = \frac{\frac{4}{3} \cdot (7\text{ cm})^3 \cdot 3{,}14}{2} - \frac{\frac{4}{3} \cdot (3\text{ cm})^3 \cdot 3{,}14}{2}$
$= 718{,}01\text{ cm}^3 - 56{,}52\text{ cm}^3 = \underline{\underline{661{,}49\text{ cm}^3}}$

d) $V = \frac{\frac{4}{3} \cdot (5{,}5\text{ cm})^3 \cdot 3{,}14}{2} + \frac{(5{,}5\text{ cm})^2 \cdot 3{,}14 \cdot 8\text{ cm}}{3}$
$= 348{,}28\text{ cm}^3 + 253{,}29\text{ cm}^3 = \underline{\underline{601{,}57\text{ cm}^3}}$

3. Radius und Durchmesser der Kugel:

$V = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot 3{,}14 \quad | \cdot 3 : 4 : 3{,}14$

$\frac{3\,052{,}08\text{ cm}^3 \cdot 3}{4 \cdot 3{,}14} = r^3$

$729\text{ cm}^3 = r^3 \quad | \sqrt[3]{\ }$

$\underline{\underline{9\text{ cm} = r}}$ → Der Durchmesser der Kugel beträgt $\underline{\underline{18\text{ cm}}}$.

Länge einer Seite der Verpackung: $\sqrt[3]{4\,913\text{ cm}^3} = 17\text{ cm}$ → Die Kugel passt nicht in die Verpackung.

4. $m = V \cdot \delta = \frac{4}{3} \cdot (6\text{ cm})^3 \cdot 3{,}14 \cdot 7{,}8\text{ g/cm}^3 = \underline{\underline{7\,053{,}696\text{ g}}}$

5. a) $V = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot 3{,}14 \cdot \delta \quad | : 4 \cdot 3 : r^3 : 3{,}14$

$\frac{20\,256{,}768\text{ g} \cdot 3}{4 \cdot (12\text{cm})^3 \cdot 3{,}14} = \delta$

$\underline{\underline{2{,}8\text{ g/cm}^3 = \delta}}$ → Das Material ist Glas.

b) $m = V \cdot \delta = \frac{4}{3} \cdot (12\text{ cm})^3 \cdot 3{,}14 \cdot 11{,}3\text{ g/cm}^3 = \underline{\underline{81\,750{,}528\text{ g}}}$
Ein Gewicht von ca. 82 kg ist nicht zu tragen.

6. a) $V_w = \frac{4}{3} \cdot (18\text{ cm})^3 \cdot 3{,}14 - \frac{4}{3} \cdot (16{,}5\text{ cm})^3 \cdot 3{,}14$
$= 24\,416{,}64\text{ cm}^3 - 18\,807{,}03\text{ cm}^3 = \underline{\underline{5\,609{,}61\text{ cm}^3}}$

b) $24\,416{,}64\text{ cm}^3 = 100\ \%$
$244{,}1664\text{ cm}^3 = 1\ \%$
$\underline{\underline{5\,609{,}61\text{ cm}^3 \approx 23\ \%}}$

7. $V_k = \frac{r^2 \cdot 3{,}14 \cdot h_k}{3} \quad | : 3{,}14 : h_k \cdot 3$

$\frac{803{,}84\text{ cm}^3 \cdot 3}{3{,}14 \cdot 12\text{ cm}} = r^2$

$64\text{ cm}^2 = r^2 \quad | \sqrt{\ }$

$\underline{\underline{8\text{ cm} = r}}$

$m = 803{,}84\text{ cm}^3 \cdot 0{,}8\text{ g/cm}^3 + \frac{\frac{4}{3} \cdot (8\text{ cm})^3 \cdot 3{,}14}{2} \cdot 0{,}8\text{ g/cm}^3$
$= 643{,}1\text{ g} + 857{,}4\text{ g} = \underline{\underline{1\,500{,}5\text{ g}}}$

Oberfläche der Kugel

1. a) $d = 20\text{ cm};\ A = 4 \cdot (10\text{ cm})^2 \cdot 3{,}\,14 = \underline{\underline{1\,256\text{ cm}^2}}$

b) $r = 9\text{ dm};\ A = 4 \cdot (9\text{ dm})^2 \cdot 3{,}14 = 1\,017{,}36\text{ dm}^2 = \underline{\underline{101\,736\text{ cm}^2}}$

c) $d = 14\text{ dm};\ A = 4 \cdot (7\text{ dm})^2 \cdot 3{,}14 = 615{,}44\text{ dm}^2 = \underline{\underline{6{,}1544\text{ m}^2}}$

d) $r = 16\text{ mm};\ A = 4 \cdot (16\text{ mm})^2 \cdot 3{,}14 = 3\,215{,}36\text{ mm}^2 = \underline{\underline{32{,}1536\text{ cm}^2}}$

2. a) $A = \frac{5\text{ cm} \cdot 3{,}14 \cdot 7\text{ cm}}{2} + 5\text{ cm} \cdot 3{,}14 \cdot 12\text{ cm} + \frac{4 \cdot (2{,}5\text{ cm})^2 \cdot 3{,}14}{2}$
$= 54{,}95\text{ cm}^2 + 188{,}40\text{ cm}^2 + 39{,}25\text{ cm}^2 = \underline{\underline{282{,}60\text{ cm}^2}}$

b) $A = (3{,}5\text{ cm})^2 \cdot 3{,}14 + 7\text{ cm} \cdot 3{,}14 \cdot 16\text{ cm} + \frac{4 \cdot (3{,}5\text{ cm})^2 \cdot 3{,}14}{2}$
$= 38{,}465\text{ cm}^2 + 351{,}68\text{ cm}^2 + 76{,}93\text{ cm}^2 = \underline{\underline{467{,}08\text{ cm}^2}}$

c) $A = \frac{4 \cdot (7\text{ cm})^2 \cdot 3{,}14}{2} + \frac{4 \cdot (3\text{ cm})^2 \cdot 3{,}14}{2} + [(7\text{ cm})^2 \cdot 3{,}14 - (3\text{ cm})^2 \cdot 3{,}14]$
$= 307{,}72\text{ cm}^2 + 56{,}52\text{ cm}^2 + 125{,}60\text{ cm}^2 = \underline{\underline{489{,}84\text{ cm}^2}}$

d) $A = \frac{4 \cdot (10\text{ cm})^2 \cdot 3{,}14}{2} + \frac{20\text{ cm} \cdot 3{,}14 \cdot 13\text{ cm}}{2}$
$= 628\text{ cm}^2 + 408{,}20\text{ cm}^2 = \underline{\underline{1\,036{,}20\text{ cm}^2}}$

3. $A = 4 \cdot r^2 \cdot 3{,}14 \quad | : 4 : 3{,}14$

$\frac{2\,461{,}76\text{ cm}^2}{4 \cdot 3{,}14} = r^2$

$196\text{ cm}^2 = r^2 \quad | \sqrt{\ }$

$\underline{\underline{14\text{ cm} = r}}$

$V = \frac{4}{3} \cdot (14\text{ cm})^3 \cdot 3{,}14 = 11\,488{,}213\text{ cm}^3 = 11{,}488213\text{ dm}^3 = \underline{\underline{11{,}488213\ \ell}}$
Es passen 11,488213 Liter in den Behälter.

4. a) Änderung der Wasserstandshöhe = Volumen der Kugel:

$V_{Kugel} = (6\text{ cm})^2 \cdot 3{,}14 \cdot 3\text{ cm} = \underline{\underline{339{,}12\text{ cm}^3}}$

→ $339{,}12\text{ cm}^3 = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot 3{,}14 \quad | : 4 \cdot 3 : 3{,}14$

$\frac{339{,}12\text{ cm}^3 \cdot 3}{4 \cdot 3{,}14} = r^3$

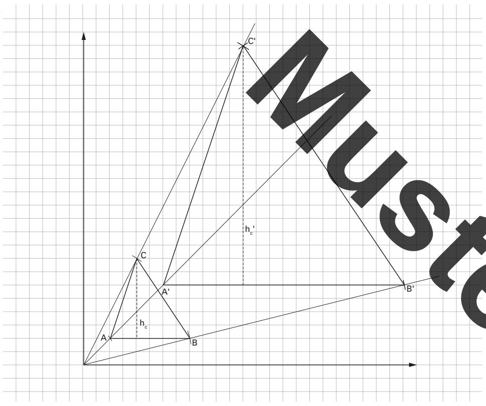
$81\text{ cm}^3 = r^3 \quad | \sqrt[3]{\ }$

$4{,}3\text{ cm} \approx r$ → $\underline{\underline{d \approx 8{,}6\text{ cm}}}$

b) Diese Form der Aufgabenstellung ist nur mit Materialien, die im Wasser untergehen, möglich. Holz ist ein Material, das für diese Aufgabenstellung nicht möglich wäre, weil es auf dem Wasser schwimmt.

5.
- ☒ Die Hälfte des Durchmessers der größeren Kugel entspricht dem dreifachen Radius der kleineren Kugel.
- ☒ Die Oberfläche der größeren Kugel ist neunmal so groß wie die Oberfläche der kleineren Kugel.
- ☒ Das Volumen der größeren Kugel ist 27-mal so groß wie das der kleineren Kugel.

1.



2. a) $A = \frac{3\text{ cm} \cdot 3\text{ cm}}{2} = 4{,}5\text{ cm}^2$

$A' = \frac{9\text{ cm} \cdot 9\text{ cm}}{2} = 40{,}5\text{ cm}^2$

$\rightarrow \; A' = A \cdot k^2$

$40{,}5\text{ cm}^2 = 4{,}5\text{ cm}^2 \cdot 3^2$

$40{,}5\text{ cm}^2 = 40{,}5\text{ cm}^2$

b) $AB \parallel A'B'$ (r) — $BC = B'C'$ (f) — $\sphericalangle ACB = \sphericalangle A'C'B'$ (r)

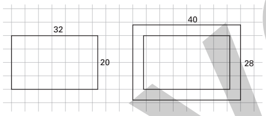
$h_c : h_{c'} = 1 : 3$ (r) — $A\,(A'B'C') = A\,(ABC) \cdot 9$ (r)

$\beta = a'$ (f) — $A'C' : 3 = AC$ (r) — $AB \parallel A'C'$ (f)

3. 32 : 20 = 40 : 28 ?

$1{,}6 \neq 1{,}4285714$

Gerahmtes und ungerahmtes Bild sind einander nicht ähnlich.



4. Fläche ursprünglicher Kreis: $A = 3\text{ cm} \cdot 3\text{ cm} \cdot 3{,}14 = 28{,}26\text{ cm}^2$

$A' = A \cdot k^2$

$63{,}585\text{ cm}^2 = 28{,}26\text{ cm} \cdot k^2 \quad |\, : 28{,}26$

$2{,}25 = k^2 \quad |\, \sqrt{\;}$

$\underline{\underline{1{,}5 = k}}$

1. a) $\frac{ZA}{ZB} = \frac{ZD}{\mathbf{ZE}}$

$\frac{ZB}{\mathbf{ZC}} = \frac{ZE}{ZF}$

$\frac{AC}{AB} = \frac{DF}{\mathbf{DE}}$

$\frac{ZC}{\mathbf{ZA}} = \frac{ZF}{ZD}$

b) $\frac{a}{x} = \frac{a + b}{\mathbf{y}}$

$\frac{\mathbf{d + e + f}}{z} = \frac{d}{x}$

$\frac{y}{d + e} = \frac{\mathbf{z}}{d + e + f}$

$\frac{a + b + c}{z} = \frac{\mathbf{a + b}}{y}$

2. a) $\frac{8}{x} = \frac{4}{2} \quad |\cdot 2x$

$16 = 4\,x \quad |\, : 4$

$\underline{\underline{4 = x}}$

Weitere drei Möglichkeiten: $\frac{x}{8} = \frac{2}{4}$; $\frac{8}{4} = \frac{x}{2}$; $\frac{4}{8} = \frac{2}{x}$

b) $\frac{x}{18} = \frac{4}{12} \quad |\cdot 18$

$\underline{\underline{x = 6}}$

Weitere drei Möglichkeiten: $\frac{18}{x} = \frac{12}{4}$; $\frac{x}{4} = \frac{18}{12}$; $\frac{4}{x} = \frac{12}{18}$

3. a) $\frac{a + b}{c} = \frac{d + e}{f}$ (r)

$\frac{b}{c} = \frac{e}{f}$ (r)

$\frac{d + e}{c} = \frac{a + b}{f}$ (f)

$\frac{f}{d} = \frac{c}{a}$ (r)

b) $\frac{x}{d} = \frac{y}{e}$ (r)

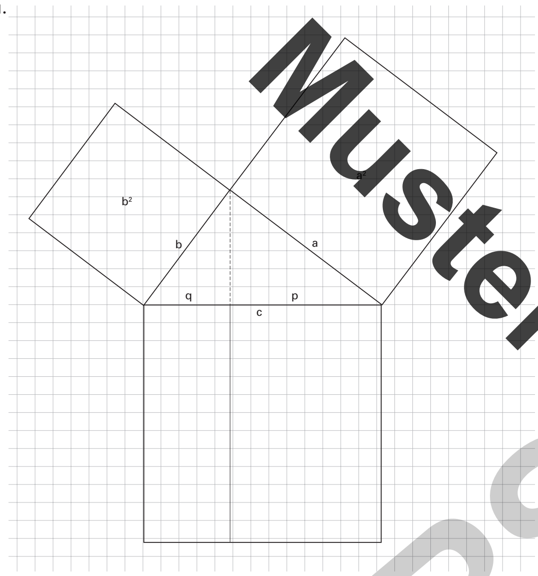
$\frac{d + e + f}{y} = \frac{c + b + a}{x}$ (r)

$\frac{x}{a + b} = \frac{z}{e + d}$ (f)

$\frac{y}{b + a} = \frac{y}{e + a}$ (f)

Kathetensatz

1.



$b^2 = c \cdot q$
$b^2 = 6{,}6\text{ cm} \cdot 2{,}4\text{ cm}$
$\underline{\underline{b^2 = 15{,}84\text{ cm}^2}}$

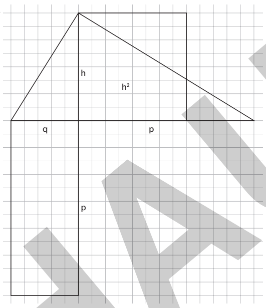
$b^2 = 4\text{ cm} \cdot 4\text{ cm}$
$\underline{\underline{b^2 = 16\text{ cm}^2}}$
$\downarrow$
$15{,}84\text{ cm}^2 \approx 16\text{ cm}^2$
$\underline{\underline{16\text{ cm}^2 = 16\text{ cm}^2}}$

$a^2 = c \cdot p$
$a^2 = 6{,}6\text{ cm} \cdot 4{,}2\text{ cm}$
$\underline{\underline{a^2 = 27{,}72\text{ cm}^2}}$

$a^2 = 5{,}3\text{ cm} \cdot 5{,}3\text{ cm}$
$\underline{\underline{a^2 = 28{,}09\text{ cm}^2}}$
$\downarrow$
$27{,}72\text{ cm}^2 \approx 28{,}09\text{ cm}^2$
$\underline{\underline{28\text{ cm}^2 = 28\text{ cm}^2}}$

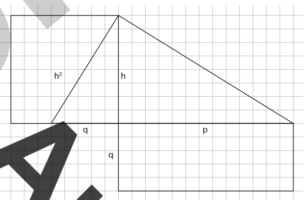
Höhensatz

1.



$h^2 = 4\text{ cm} \cdot 4\text{ cm} = 16\text{ cm}^2$
$h^2 = q \cdot p = 2{,}5\text{ cm} \cdot 6{,}5\text{ cm} = 16{,}25\text{ cm}^2 \approx \underline{\underline{16\text{ cm}^2}}$

2.



$h^2 = 4\text{ cm} \cdot 4\text{ cm} = 16\text{ cm}^2$
$h^2 = p \cdot q = 6{,}5\text{ cm} \cdot 2{,}5\text{ cm} = 16{,}25\text{ cm}^2 \approx \underline{\underline{16\text{ cm}^2}}$