Aufgaben

Aufgabe 1:
Löse das Gleichungssystem: $\mathbf{3x + 7y = 26}$
$\mathbf{5x - 6y = 8}$

Auf den ersten Blick bietet sich hier kein Verfahren direkt an. Mit einer Multiplikation schaffen wir aber die Voraussetzungen für das Additionsverfahren:

$$\begin{array}{ll} 3x + 7y = 26 & |\cdot 6 \\ 5x - 6y = 8 & |\cdot 7 \\ \hline 18x + 42y = 156 & (+) \\ 35x - 42y = 56 & \\ \hline 53x + 0 = 212 & |:53 \end{array} \quad \Rightarrow x = 4$$

$$\begin{array}{ll} 3\cdot 4 + 7y = 26 & |-12 \\ 7y = 14 & |:7 \end{array} \quad \Rightarrow y = 2$$

MATHRIX

Aufgabe 2:

Löse das Gleichungssystem:

$$y = -\frac{2}{3}x + 5$$
$$3(2x + y) - 21 = 2(3y + x)$$

Zuerst müssen wir die zweite Gleichung vereinfachen:

$$y = -\frac{2}{3}x + 5$$
$$6x + 3y - 21 = 6y + 2x$$

$$y = -\frac{2}{3}x + 5 \qquad |\cdot 3$$
$$4x - 3y = 21$$

$$3y = -2x + 15 \qquad |+2x$$
$$4x - 3y = 21$$

$$2x + 3y = 15 \qquad (+)$$
$$4x - 3y = 21$$

$$6x = 36 \qquad \Rightarrow x = 6$$

$$y = -\frac{2}{3} \cdot 6 + 5 = -4 + 5 \qquad \Rightarrow y = 1$$

MATHRIX

Aufgabe 3 :

Löse das Gleichungssystem: $\frac{1}{3}x - 2y = -1$
$2x - y = 4x - 7$

$\frac{1}{3}x - 2y = -1 \quad | \cdot 3$
$2x - y = 4x - 7 \quad | -2x+y+7$

$x - 6y = -3$
$7 = 2x + y \quad |$ Seiten tauschen

$x - 6y = -3 \quad | + 6y$
$2x + y = 7$

$x = 6y - 3 \quad (1)$
$2x + y = 7 \quad (2)$

(1) in (2):

$2 \cdot (6y - 3) + y = 7$
$12y - 6 + y = 7 \quad |+6$
$13y = 13 \quad |:13 \qquad \Rightarrow y = 1$

$x = 6 \cdot 1 - 3 = 3 \qquad \Rightarrow x = 3$

MATHRIX

Aufgabe 4 :

Löse das Gleichungssystem $\begin{aligned} 4x - 3y &= 13 \\ 6x - 2y &= 12 \end{aligned}$

$$\begin{aligned} 4x - 3y &= 13 \\ 6x - 2y &= 12 \qquad |:2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4x - 3y &= 13 \\ 3x - y &= 6 \qquad |+y-6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4x - 3y &= 13 \qquad (1) \\ 3x - 6 &= y \qquad (2) \end{aligned}$$

(2) in (1) :

$$\begin{aligned} 4x - 3\cdot(3x - 6) &= 13 \\ 4x - 9x + 18 &= 13 \qquad |-18 \\ -5x &= -5 \qquad |:(-5) \qquad \Rightarrow x = 1 \end{aligned}$$

$y = 3\cdot 1 - 6 \qquad \Rightarrow y = -3$

Bruchgleichungen

Grundlagen

Bruchgleichungen sind Gleichungen, in denen die Variable x auch im Nenner vorkommt. Variabel heißt, sie kann theoretisch jeden Wert annehmen. Problematisch wird dies jedoch für solche Werte von x, für die ein Nenner gleich 0 wird. Man dividiert dann nämlich durch Null und das ist ja bekanntlich verboten.

In der Lösungsmenge solcher Aufgaben sind dann diese x-Werte **keine** Lösung! Um dies von vornherein zu berücksichtigen, stellt man zuerst die Definitionsmenge auf, d.h. man schließt die x-Werte aus einer bestimmten Grundmenge (z.B. reelle Zahlen R oder rationale Zahlen Q) aus, die einen Nenner = 0 machen.

Dazu nimmt man nacheinander die einzelnen Terme der Nenner, welche die Variable x enthalten und setzt sie gleich Null. Die dadurch entstandene einfache Gleichung löst man nach x auf und erhält so diese speziellen x-Werte. Als Schreibweise für die Definitionsmenge verwendet man die Mengenschreibweise:

$$D = R \setminus \{x_1; x_2; x_3; \ldots\}$$

(lies: Definitionsmenge = Menge der Reellen Zahlen ohne die Elemente x_1, x_2, x_3, ...)

R ist hierbei die sogenannte Grundmenge, also das Reservoir aus dem die x-Werte kommen. (Denkbar ist auch die Menge der Rationalen Zahlen Q). Normalerweise schreibt man Mengenbezeichnungen immer mit Doppelstrich, aber diese Darstellung unterstützt der hier verwendete Formeleditor von Microsoft Word nicht!

Vorübungen zum Lösen von Bruchgleichungen:

1. Wie lauten die Definitionsmengen folgender Bruchterme?

	Bruchterm	Definitionsmenge
a)	$\frac{5+x}{x}$	
b)	$\frac{5+x}{x^2}$	
c)	$\frac{5+x}{x^2-4}$	
d)	$\frac{5+x}{2x-3}$	
e)	$\frac{5+x}{x^2-2x-3}$	
f)	$\frac{17x-13}{4x^2-16x+16}$	
g)	$\frac{2}{3x^2+12}+\frac{5}{x-2}$	

2. Wie lautet das **kleinste** gemeinsame Vielfache folgender Terme:

	Term 1	Term	Term	kgV
a)	6	4x	3x	
b)	6x	$4x^2$	3	
c)	x	x-1		
d)	2x-2	x-1		
e)	2x-2	x-1	3x-3	
f)	$4x^2-1$	2x-1	2x+1	
g)	$x^2+2x-35$	x-5	x+7	
h)	$4x^2-16x+16$	2(x-2)	2x-4	

1. Musteraufgabe:

Bestimme die Definitions- und Lösungsmenge folgender Gleichung:

$$\frac{2}{9x^2-1}=\frac{3x}{3x-1}-\frac{5x+1}{3x+1}$$

Für die Festlegung der Definitionsmenge, aber auch für das Festlegen des nachher notwendigen Hauptnenners, ist es von Vorteil, wenn man die Nenner durch Ausklammern oder Anwenden von Binomischen Formeln auf Gemeinsamkeiten untersucht, meistens hängen sie nämlich irgendwie zusammen!

Erster Nenner: $9x^2 - 1 \Rightarrow (3x-1)(3x+1)$ 3.Binom: $\mathbf{a^2-b^2 = (a-b)(a+b)}$

Für den Definitionsbereich kann man nun entweder $9x^2-1$ gleich Null setzen, oder den Klammerterm:

$$9x^2 - 1 = 0 \Rightarrow 9x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{9} \Rightarrow x = \pm\frac{1}{3}$$

oder: $(3x-1)(3x+1)=0$, diese Gleichung hat die Form „Produkt =0", dies geht nur, wenn einer der beiden Faktoren gleich 0 ist!

$3x-1 = 0 \Rightarrow 3x=1 \Rightarrow x=$

$3x+1=0 \Rightarrow 3x=-1 \Rightarrow x=-$

2. + 3. Nenner: sie sind im ersten Nenner bereits enthalten, brauchen also nicht weiter untersucht werden!

Der Definitionsbereich lautet also: $\mathbf{D = R\backslash\{-\frac{1}{3};+\frac{1}{3}\}}$

Um nun in der Bruchgleichung die Nenner wegzubekommen, muss man die ganze Gleichung, d.h. jeden einzelnen Bruch (nur den Zähler!!!) mit dem Hauptnenner durchmultiplizieren. Dabei ist es sinnvoll, für die Nenner die oben umgeformte Version zu nehmen. Stehen Summen im Zähler, musst du sie unbedingt in Klammern setzen!

$$\frac{2}{(3x-1)(3x+1)}=\frac{3x}{3x-1}-\frac{5x+1}{3x+1} \qquad |\cdot(3x-1)(3x+1)$$

$$\frac{2\cancel{(3x-1)}\cancel{(3x+1)}}{\cancel{(3x-1)}\cancel{(3x+1)}}=\frac{3x\cancel{(3x-1)}(3x+1)}{\cancel{3x-1}}-\frac{(5x+1)(3x-1)\cancel{(3x+1)}}{\cancel{3x+1}} \qquad |\text{ nun kann man kürzen!}$$

$2 = 3x(3x+1) - (5x+1)(3x-1)$ | Achtung, „Minusklammer"

$2 = 9x^2 + 3x - (15x^2 - 5x + 3x - 1)$

$2 = 9x^2 + 3x - 15x^2 + 2x + 1 \qquad |+6x^2 - 5x - 1$

$6x^2 - 5x + 1 = 0$

An dieser Stelle bieten sich nun zwei Lösungsmöglichkeiten:

Entweder man lässt diese Gleichung mit der Normalform $ax^2+bx+c=0$ stehen und verwendet die dafür passende große Lösungsformel, oder man dividiert durch 6 und erhält dann die Normalform $x^2+px+q=0$ mit der etwas einfacheren Formel.

Für Schüler, die nicht gerne mit Brüchen arbeiten, biete sich hier der erste Weg an, aber auch der zweite führt zum Ziel:

$ax^2 + bx + c = 0$ **Lösungsformel:** $x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	$x^2 + px + q = 0$ **Lösungsformel:** $x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$
$6x^2 - 5x + 1 = 0$ $x_{1/2} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 6 \cdot 1}}{2 \cdot 6} = \frac{5 \pm 1}{12}$ $x_1 = \frac{5+1}{12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$ $x_2 = \frac{5-1}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$ keine Lösung, siehe D! also: $\underline{L = \left\{\frac{1}{2}\right\}}$	$6x^2 - 5x + 1 = 0 \quad \vert :6$ $x^2 - \frac{5}{6}x + \frac{1}{6} = 0$ $x_{1/2} = -\frac{-\frac{5}{6}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-\frac{5}{6}}{2}\right)^2 - \frac{1}{6}}$ $= \frac{5}{12} \pm \sqrt{\left(\frac{5}{12}\right)^2 - \frac{1}{6}} = \frac{5}{12} \pm \sqrt{\frac{25}{144} - \frac{24}{144}}$ $= \frac{5}{12} \pm \frac{1}{12}$ $x_1 = \frac{5}{12} + \frac{1}{12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$ $x_2 = \frac{5}{12} - \frac{1}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$ Keine Lösung, siehe D! $\Rightarrow \underline{L = \left\{\frac{1}{2}\right\}}$

Bei Bruchgleichungen muss man also zum Schluss die erhaltenen Lösungen immer mit der Definitionsmenge vergleichen und die ausschließen, die in D enthalten sind!

Beim Vergleich der beiden Lösungswege erkennt man, dass bei dieser Gleichung der erste Weg einfacher ist, weil man Brüche weitgehend vermeidet. Der zweite ist also nur dann empfehlenswert, wenn in der Gleichung von vorne herein a=1 ist, oder bei der Division durch a keine Brüche entstehen!

Anmerkung:
Sollte eine Bruchgleichung die Form „Bruch = Bruch" haben und die Nenner teilerfremd sein, führt die Kreuzmultiplikation schnell weiter:

$$\frac{2x-4}{3x+15} = \frac{5-2x}{1+x} \Rightarrow \frac{2x-4}{3x+15} \times \frac{5-2x}{1+x} \Rightarrow (2x-4)(1+x) = (5-2x)(3x+15) \Rightarrow \ldots\ldots$$

D muss aber auch hier bestimmt werden! (D=R\{-5;-1})

2. Musteraufgabe:

$$\frac{x^2+25x+100}{2x^2+20x+50}=\frac{2x+3}{x+5}-\frac{x-6}{2x+10} \qquad \Big|\cdot 2(x+5)^2$$

$$2x^2+20x+50 \;\Downarrow\; 2(x^2+10x+25) \;\Downarrow\; 2(x+5)^2 \qquad x+5 \qquad 2x+10 \;\Downarrow\; 2(x+5)$$

$$\mathrm{HN} = 2(x+5)^2$$

Für die Definitionsmenge: Nennerterme, die x enthalten, gleich Null setzen (hier nur ein Term!)

$x+5=0 \Rightarrow x=-5 \Rightarrow$ **$D=\mathbb{R}\setminus\{-5\}$**

$$\frac{(x^2+25x+100)\cdot \cancel{2(x+5)^2}}{\cancel{2(x+5)^2}}=\frac{(2x+3)\cdot 2(x+5)^{\cancel{2}}}{\cancel{x+5}}-\frac{(x-6)\cdot \cancel{2}(x+5)^{\cancel{2}}}{\cancel{2(x+5)}}$$

$x^2+25x+100=(2x+3)(2x+10)-(x^2+5x-6x-30)$ „Minusklammer!"

$x^2+25x+100=4x^2+20x+6x+30-x^2-5x+6x+30$

$x^2+25x+100=3x^2+27x+60$

$2x^2+2x-40=0 \qquad |:2$

$x^2+x-20=0$

$x_{1/2}=-0{,}5\pm\sqrt{0{,}25+20}=-0{,}5\pm 4{,}5$

$x_1=4$

$x_2=-5$ keine Lösung, siehe D! $\Rightarrow$ **$L=\{4\}$**

Reihenfolge der Bearbeitung bei Bruchgleichungen:

1. Alle Nenner auf Verwandtschaft untersuchen (Ausklammern, Binome)
2. Jeden Nenner gleich Null setzen und das Ergebnis dieser Rechnungen in die geschweifte Klammer des Definitionsbereiches schreiben.
3. Den Hauptnenner suchen (= kgV, also der Term, in dem alle Nenner enthalten sind)
4. Jeden Bruch mit dem HN multiplizieren (Zähler multiplizieren!)
5. Kürzen, in den Nennern darf nichts übrig bleiben!
6. Die Zählerterme vereinfachen
7. Alles auf eine Seite der Gleichung bringen
8. Bei $ax^2 + bx + c = 0$ die große Lösungsformel verwenden,
   bei $x^2 + px + q = 0$ die kleine Lösungsformel verwenden
9. Die Lösungen notieren und mit D vergleichen, Zahlen, die in D ausgeschlossen wurden, sind keine Lösung, Lösungsmenge notieren

Lösungen der Vorübungen

1. Wie lauten die Definitionsmengen folgender Bruchterme?

	Bruchterm	Definitionsmenge
a)	$\frac{5+x}{x}$	$D = R \setminus \{0\}$
b)	$\frac{5+x}{x^2}$	$D = R \setminus \{0\}$
c)	$\frac{5+x}{x^2-4}$	$D = R \setminus \{-2;2\}$ (Achtung: $x^2-4 = (x-2)(x+2)$!!!)
d)	$\frac{5+x}{2x-3}$	$D = R \setminus \{1,5\}$
e)	$\frac{5+x}{x^2-2x-3}$	$D = R \setminus \{3;-1\}$ (Achtung: quadratische Gleichung!)
f)	$\frac{17x-13}{4x^2-16x+16}$	$D = R\setminus\{4; -4\}$ (Achtung: quadratische Gleichung!)
g)	$\frac{2}{3x^2-12} + \frac{5}{x+2}$	$D = R\setminus\{2; -2\}$ (Achtung: $3x^2-12=3(x^2-4)=(x-2)(x+2)$)

2. Wie lautet das **kleinste gemeinsame Vielfache** folgender Terme:

	Term 1	Term 2	Term 3	kgV
a)	6	4x	3x	12x
b)	6x	$4x^2$	3	$12x^2$
c)	x	x-1		x(x-1)
d)	2x-2	x-1		2(x-1)
e)	2x-2	x-1	3x-3	6(x-1)
f)	$4x^2-1$	2x-1	2x+1	(2x-1)(2x+1) Dritter Binom!!
g)	$x^2+2x-35$	x-5	x+7	(x-5)(x+7)
h)	$4x^2-16x+16$	2(x-2)	2x-4	(2x-4)(2x-4) Zweiter Binom!!

Zu den Binomen:

Erster und zweiter Binom: Man erkennt sie daran, dass am Anfang und am Ende ein quadratischer Term steht. Der mittlere Term, das doppelte Produkt, ergibt sich, wenn man die Wurzel aus dem ersten mit der Wurzel aus dem zweiten quadratischen Term und mit 2 multipliziert:

1.Binom: $a^2+2ab+b^2 = (a + b)^2$ **2.Binom: $a^2-2ab+b^2 = (a - b)^2$**

Dritter Binom: Er hat immer die Form „quadratischer Term minus quadratischer Term"

3. Binom: $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$