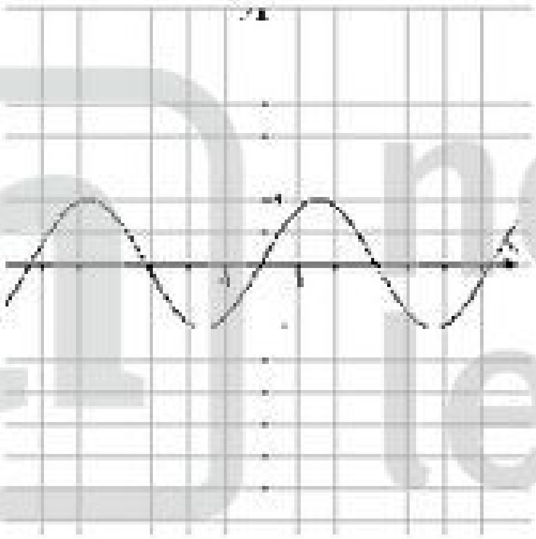
Beispiele zu 3) trigonometrische Terme/Gleichungen

Für diesen Bereich müsst Ihr wichtige Punkte der Sinus- und Cosinus-Kurve auswendig können oder die Kurven skizzieren können:



Graph von sinx

Wichtige Punkte des Graphen von $[0;2\pi]$:

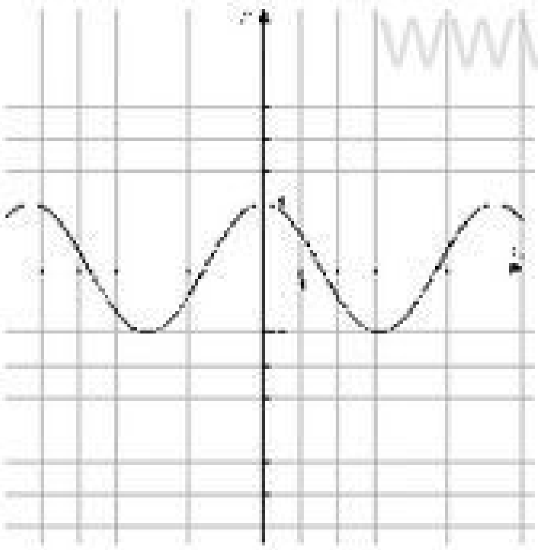
$\sin(0)=0$

$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$

$\sin(\pi)=0$

$\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)=-1$

$\sin(2\pi)=0$



Graph von cosx

Wichtige Punkte des Graphen von $[0;2\pi]$:

$\cos(0)=1$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$

$\cos(\pi)=-1$

$\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)=0$

$\cos(2\pi)=1$

Gleichungsbeispiele

a) sin(4x)=1, $x\in[0;\pi]$

Was müsst Ihr an Stelle 4x schreiben, damit die Gleichung stimmt?

Aus der Sinuskurve oben folgt: $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$.

Also muss $4x=\frac{\pi}{2}$ sein $\rightarrow x_1=\frac{\pi}{8}$

Eine Periode, also $2\pi=\frac{4\pi}{2}$ weiter, wird der Sinus wieder 1: $\sin\left(\frac{5\pi}{2}\right)=1$

Also muss $4x=\frac{5\pi}{2}$ sein $\rightarrow x_2=\frac{5\pi}{8}$. Dieser Wert liegt auch noch im angegebenen Intervall $x\in[0;\pi]$ und ist damit eine 2.Lösung der Gleichung.

b) $\cos(2x-\pi)=0, \quad x \in [0;2\pi]$

Was müsst Ihr an Stelle $(2x-\pi)$ schreiben, damit die Gleichung stimmt?

Aus der Cosinuskurve oben folgt: $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$ und $\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)=0$

Also muss

1.) $2x-\pi=\frac{\pi}{2}$ sein $\rightarrow 2x=\frac{3\pi}{2} \rightarrow x_1=\frac{3\pi}{4}$ und

2.) $2x-\pi=\frac{3\pi}{2}$ sein $\rightarrow 2x=\frac{5\pi}{2} \rightarrow x_2=\frac{5\pi}{4}$ und

3.) $2x-\pi=\frac{5\pi}{2}$ sein $\rightarrow 2x=\frac{7\pi}{2} \rightarrow x_3=\frac{7\pi}{4}$

c) Kombinationen/Varianten

- $(x^2-4)\cdot\cos(x)=0, \ x \in [0;2\pi]$ Lösung findet man mit Hilfe des Satzes vom Nullprodukt:

I) $(x^2-4)=0 \rightarrow x_1=2$ (-2 liegt außerhalb des vorgegebenen Intervalls)

II) $\cos(x)=0 \rightarrow x_2=\frac{\pi}{2}$ und $x_3=\frac{3\pi}{2}$

- $\sin^2(x)-\sin(x)=0, \quad x \in [0;2\pi]$. sin(x) kann man ausklammern:

$\sin(x)(1-\sin(x))=0$ Lösung findet man mit Hilfe des Satzes vom Nullprodukt:

I) $\sin(x)=0 \rightarrow x_1=0$ und $x_2=\pi$ und $x_3=2\pi$

II) $1-\sin(x)=0 \rightarrow \sin(x)=1 \rightarrow x_4=\frac{\pi}{2}$

Beispiele zu 4) Gleichungen mit e -Termen

a) $e^{2x}=4 \rightarrow \ln e^{2x}=\ln 4 \rightarrow$ mit Hilfe des 3.log-Gesetzes:
$\rightarrow 2x \cdot \ln e=\ln 4 \rightarrow 2x=\ln 4 \rightarrow 2x=\ln 2^2 \rightarrow 2x=2 \cdot \ln 2 \rightarrow x=\ln 2$

> **Der Besserwisser-Kasten:**
>
> **3.Log.-Gesetz:** $\log a^b=b \cdot \log a$. D.h. jede Hochzahl hinter einem Log, kann auch als Faktor vor den Log geschrieben werden.

Wichtige Werte fürs Rechnen mit ln und e:

$\ln e=1$ $e^{\ln b}=b$ $\ln 1=0$ $e^0=1$ $\ln(0)$ ist nicht definiert

b) $e^{3x}-2e^x=0 \rightarrow$ e^x ausklammern:
$e^x\left(e^{2x}-2\right)=0 \rightarrow$ Satz vom Nullprodukt:
I) $e^x=0 \rightarrow$ keine Lösung
II) $e^{2x}-2=0 \rightarrow e^{2x}=2 \rightarrow \ln e^{2x}=\ln 2 \rightarrow 2x \cdot \ln e=\ln 2 \rightarrow 2x=\ln 2 \rightarrow x=\frac{1}{2}\ln 2=\ln\sqrt{2}$

c) $-e^x+\frac{3}{e^x}=2$, da hier wieder ein x-Term im Nenner steht, muss man mit diesem die Gleichung durchmultiplizieren (siehe auch Bruchgleichungen):
$-e^x+\frac{3}{e^x}=2 \Big| \cdot e^x \quad \rightarrow -e^{2x}+3=2e^x$ sortieren: $\rightarrow -e^{2x}-2e^x+3=0$

Folgender Fehler im Lösungsweg wird dabei häufig gemacht:

$-e^{2x}-2e^x+3=0 \rightarrow$ Anwendung von ln: $\ln(-e^{2x})-\ln(2e^x)+\ln(3)=\ln(0)$
Bei der Anwendung einer Rechenoperation (hier ln) auf eine Gleichung, dürft ihr die Rechenoperation nie zwischen die Rechenzeichen schieben.
Wenn jetzt schon ln angewandt wird, dann so: $\ln(-e^{2x}-2e^x+3)=\ln(0)$.
Ihr müsst die Rechenoperation immer auf die komplette rechte bzw. linke Seite der Gleichung anwenden. Dann wäre es zwar mathematisch richtig, bringt Euch aber nicht weiter, da es jetzt keine Möglichkeit mehr gibt das x aus der Klammer zu befreien.
Nebenbei bemerkt ist ln(0) gar nicht definiert.

Hier gibt es nur die Lösungsmöglichkeit der Substitution:

$-e^{2x}-2e^x+3=0 \rightarrow \quad e^x=u \rightarrow \quad -u^2-2u+3=0 \rightarrow$ in die MNF:
$u_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{4-4\cdot(-1)\cdot 3}}{2\cdot(-1)}=\frac{2\pm 4}{-2} \rightarrow u_1=-3$ und $u_2=1$

Rücksubstitution: Gleichung I) $e^x=-3 \rightarrow$ keine Lösung
Gleichung II) $e^x=1 \rightarrow$ **x=0**

Mögliche Varianten für zukünftige AbiAufgaben

Im Themengebiet der Aufgabe 3 sind grundsätzlich auch Wurzelgleichungen und Gleichungen mit dem ln denkbar. Ich halte es aber momentan für recht unwahrscheinlich, dass diese Gleichungsarten im Abi abgefragt werden. Bisher wurden sie noch nicht gestellt. Trotzdem je ein Beispiel.

a) $3\sqrt{x}-\sqrt{x^3}=2,\quad x>0$ Wurzelgleichungen müssen zum Lösen quadriert werden:

$$3\sqrt{x}-\sqrt{x^3}=2 \,\Big|\, \uparrow^2 \rightarrow \left(3\sqrt{x}-\sqrt{x^3}\right)^2=2^2 \rightarrow \left(3\sqrt{x}\right)^2-2\cdot 3\sqrt{x}\cdot\sqrt{x^3}+\left(\sqrt{x^3}\right)^2=4$$

$\rightarrow 9x-6x^2+x^3=4$ sortieren:

$\rightarrow x^3-6x^2+9x-4=0$ hier muss jetzt eine Nullstelle erraten werden. Diese wird dann durch Polynomdivision aus dem Term „herausgezogen", so dass nur noch ein quadratischer Term zurückbleibt, den man leicht mit der MNF lösen kann.
Solltet Ihr jemals eine Nullstelle erraten müssen, dann versucht es zuerst mit den Zahlen 1 oder 2. Zu 99% klappt das. Wenn nicht, dann -1 oder -2.

Hier ergibt sich für die Zahl 1 eine wahre Aussage:

Polynomdivision $(x^3-6x^2+9x-4):(x-1)=x^2-5x+4$

$$\begin{array}{l}
-(x^3-x^2) \\
\hline
\quad -5x^2+9x-4 \\
\quad -(5x^2+5x) \\
\hline
\qquad 4x-4 \\
\qquad -(4x-4) \\
\hline
\qquad\quad 0
\end{array}$$

$x^2-5x+4=0$ damit in die MNF: $x_{2,3}=\dfrac{5\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot 1\cdot 4}}{2}=\dfrac{5\pm 3}{2}\rightarrow x_2=4$ und $x_3=1$

Probe der Lösungen!!!
Typisch für Wurzelgleichungen ist die Probe der Lösungen, also das Wiedereinsetzen der Lösungen in die Ausgangsgleichung. Durch das Quadrieren der Gleichung kann sich die Lösungsmenge erweitern.

Probe mit $x_1=x_3=1$: $3\sqrt{1}-\sqrt{1^3}=2 \quad\rightarrow\quad 3-1=2$ **richtig!**

Probe mit $x_2=4$: $3\sqrt{4}-\sqrt{4^3}=2 \quad\rightarrow\quad 3\cdot 2-8=2 \quad\rightarrow\quad -2=2$ **falsch!**

Einzige Lösung von $3\sqrt{x}-\sqrt{x^3}=2$ ist also $x_1=1$.