3. Punktprobe: Koordinaten des Punktes in die Gleichung einsetzen.
Wahre Aussage: Punkt liegt drauf
Falsche Aussage: Punkt liegt nicht drauf

Sonderfall: Eine Koordinate des Punktes ist eine Variable:
Wieder beide Koordinaten in die Gleichung einsetzen, die Variable berechnen.

Beispiele: a) Liegt der Punkt P(2| -3) auf der Parabel $y = x^2 - 3x + 2$?

$-3 = 2^2 - 3 \cdot 2 + 2$
$-3 = 4 - 6 + 2$
$-3 = 0$ falsche Aussage $\Rightarrow$ P liegt nicht drauf!

b) Auf der Parabel $y = x^2 - 3x + 2$ liegt der Punkt $P(2|y_p)$. Berechne y_p!

$y_p = 2^2 - 3 \cdot 2 + 2 = 4 - 6 + 2 \Rightarrow y_p = 0 \Rightarrow P(2|0)$

4. Scheitelpunkt von Parabeln bestimmen: Die Normalform $y = x^2+px+q$ quadratisch ergänzen, dass die Scheitelform ($y = (x-x_s)^2 + y_s$) entsteht. Scheitelkoordinaten herauslesen. (Beispiel siehe 1.b)

5. Scheitelform in Normalform überführen: Auf der rechten Seite den Binom ausrechnen und die Zahlenwerte addieren, so dass die Normalform $y=x^2+px+q$ entsteht.

Beispiel: gegeben ist der Scheitelpunkt S(-2|-3)

Scheitelform: $y = (x+ 2)^2 -3$
$y = x^2 + 4x + 4 - 3$
Normalform: $y = x^2 + 4x + 1$

6. Schnittpunkte mit der y-Achse bestimmen: entweder in der Gleichung x=0 setzen und y berechnen oder einfacher: aus der Normalform q herauslesen (q = y-Achsenabschnitt)

Beispiele: Gerade: $y = 2x - 4$ hat den Schnittpunkt N(0|-4)
Parabel: $y = 2x^2 - 3x + 12$ hat den Schnittpunkt N(0|12)

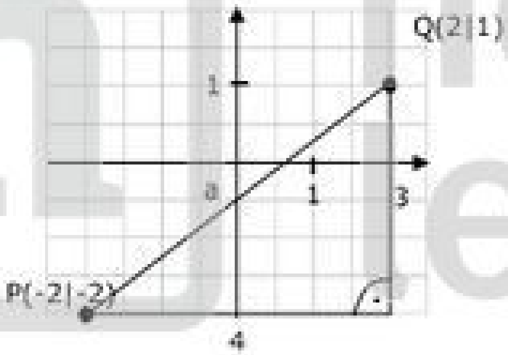
7. Schnittpunkte mit der x-Achse bestimmen: in der Funktionsgleichung y = 0 setzen. Es entsteht bei Parabeln eine quadratische Gleichung die man entweder mit quadratischer Ergänzung oder mit der Mitternachtsformel löst. (Zwei Lösungen, eine oder keine möglich!!)

Beispiele: a) Gerade:
$y = 2x - 4$
$0 = 2x - 4 \quad | +4$
$2x = 4 \quad |:2$
$x = 2 \Rightarrow N(2|0)$

b) Parabel:
$y = x^2 - 3x - 10$
$0 = x^2 - 3x - 10$
$x_{1/2} = 1{,}5 \pm \sqrt{1{,}5^2 + 10} = 1{,}5 \pm \sqrt{12{,}25} = 1{,}5 \pm 3{,}5$
$x_1 = 1{,}5 + 3{,}5 = 5 \Rightarrow$ 1. Nullstelle: $N_1(5|0)$
$x_2 = 1{,}5 - 3{,}5 = -2 \Rightarrow$ 2. Nullstelle: $N_2(-2|0)$

8. Abstand von 2 Punkten bestimmen: In der Zeichnung beide Punkte miteinander verbinden. Diese Strecke ist die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, bei dem die Länge der Katheten mit den Koordinaten der beiden Punkte bestimmt werden können. Dann Pythagoras!
Beachte: Als Längeneinheit keine cm angeben sondern Längeneinheiten LE!

Beispiel: Abstand der Punkte P(-2|-2) und Q(2|1):



Mit P und Q und den Koordinatenlinien ein rechtwinkliges Dreieck bilden, Maße ablesen, dann Pythagoras!

$a = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5{,}0\,\text{LE}$

9. Aufstellen von Funktionsgleichungen:

a) bei Geraden

1.Möglichkeit: Steigung und y-AA ist gegeben:

Beispiel: m = -4 und y-AA = 5:
Da in der Normalform der Geradenfunktion y = mx + b das b ja der y-AA ist, kann man dort sofort m und auch b einsetzen.
Also: y = -4x + 5

2. Möglichkeit: Steigung und ein Punkt ist gegeben:

Beispiel: m = -4 und P(1|-3):
Auch hier kann man sofort m wieder einsetzen, aber auch die Koordinaten des Punktes, b bleibt als einzige Variable übrig und kann berechnet werden:
Also: $-3 = -4 \cdot 1 + b \Rightarrow b = 1 \Rightarrow y = -4x + 1$

Oder: Einsetzen in die sog. Punkt-Steigungs-Form der Formelsammlung:

$m = \dfrac{y - y_1}{x - x_1} \quad \Rightarrow \quad -4 = \dfrac{y-(-3)}{x-1} \quad \Rightarrow \quad -4(x-1) = y+3 \;\Rightarrow y = -4x + 4 - 3 = -4x + 1$

3. Möglichkeit: Zwei Punkte sind gegeben

Beispiel: P(-2|4) und Q(8|-6):
Man setzt die Koordinaten der Punkte nacheinander in die Normalform y = mx + b ein. Man erhält dann zwei Gleichungen mit den Variablen m und b, die man mit den bekannten Verfahren (in diesem Fall am günstigsten das Subtraktionsverfahren) berechnen kann (oder 2-Punkte-Form der Formelsammlung verwenden!):

P(-2|4):	$4 = m \cdot (-2) + b$	| (-)	(Obere Gleichung von der unteren abziehen!)
Q(3|-1):	$-6 = m \cdot 8 + b$		
	$-10 = 10m + 0$	|:10	
$\Rightarrow$	$m = -1$		
$\Rightarrow$	$b = 4 + 2m = 4 + 2 \cdot (-1) = 2$		(= obere Gleichung, umgestellt nach b)

Diese Werte einsetzen in y = mx + b ergibt als Lösung: y = -x + 2

b) Bei Parabeln

1. Möglichkeit : Scheitel ist gegeben

z.B.: S(-2|-3): entweder in die Scheitelform $y = (x-x_s)^2 + y_s$ einsetzen und den Binom dann ausrechnen und zusammenfassen:

$y = (x+2)^2-3 = x^2 + 4x + 4 - 3 = x^2 + 4x + 1$

oder laut Formelsammlung: $S\left(-\frac{p}{2} \middle| q-\frac{p^2}{4}\right)$; also: $-\frac{p}{2} = -2 \Rightarrow p = 4$ und

$q-\frac{p^2}{4} = -3 \Rightarrow q = -3+\frac{4^2}{4} = 1$ also: $y = x^2 + 4x + 1$

2. Möglichkeit: Zwei beliebige Punkte sind gegeben (können auch die Achsenschnittpunkte sein!):

Dann so vorgehen wie bei der Geraden (s.o. 3. Mögl.k.), also die Koordinaten der Punkte jeweils in die Normalform $y = x^2 + px + q$ einsetzen, ergibt zwei Gleichungen mit den Variablen p und q, dann Subtraktionsverfahren, p bzw. q ausrechnen und in $y = x^2 + px + q$ einsetzen.

Beispiel: P(-2|-2) und Q(2|6):

Koordinaten von P einsetzen in $y = x^2 + px + q$:

$$\begin{aligned} -2 &= (-2)^2 + p\cdot(-2) + q \\ -2 &= 4 - 2p + q \qquad |+2+2p-q \\ 2p - q &= 6 \qquad (1) \end{aligned}$$

Koordinaten von Q einsetzen in $y = x^2 + px + q$:

$$\begin{aligned} 6 &= 2^2 + p\cdot 2 + q \qquad |-1\cdot p \\ 6 &= 4 + 2p + q \qquad |-4 \\ 2 &= 2p + q \\ q &= 2 - 2p \qquad (2) \end{aligned}$$

Gleichung (2) in Gleichung (1) einsetzen:

$$\begin{aligned} 2p - (2 - 2p) &= 6 \\ 2p - 2 + 2p &= 6 \\ 4p &= 8 \\ p &= 2 \end{aligned}$$

mit Gleichung (2): $q = 2 - 2\cdot 2 = -2$

Gleichung der Parabel: $y = x^2 + 2x - 2$

Vorteil der Aufgaben mit Funktionen:

Man kann in der Zeichnung sofort nachprüfen, ob man richtig gerechnet hat. Wenn keine Zeichnung verlangt ist: Auf dem Konzeptpapier trotzdem eine anfertigen!

Aufgaben

Aufgabe 1:

Die Parabel (p_1) $y = -0{,}5x^2+4$ schneidet die Parabel (p_2) $y = x^2-2x+2$ in den Punkten A und B.

a) Bestimme die Koordinaten des Scheitelpunkts von p_2!
b) Zeichne beide Parabeln in ein Koordinatensystem (1 LE =1 cm)!
c) Berechne die Koordinaten von A und B!
d) Bestimme rechnerisch die Funktionsgleichung der Geraden durch A und B?
e) Berechne die Länge von AB!

a) Scheitel von p_2:

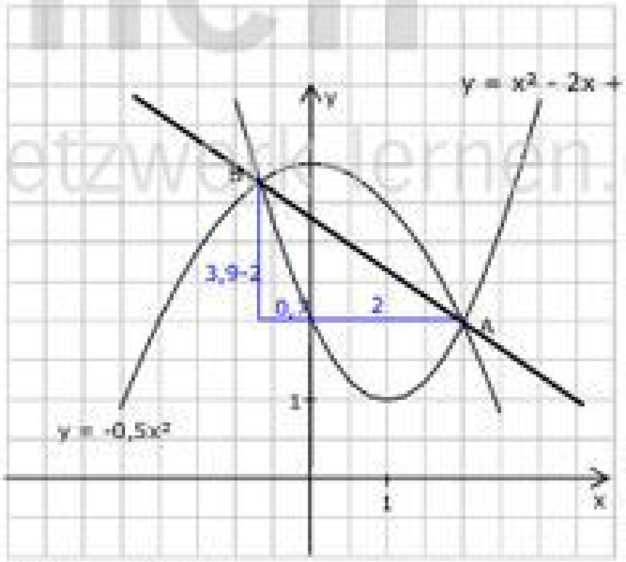
Am schnellsten mit der Formelsammlung:

$$x_s = -\frac{p}{2} = -\frac{-2}{2} = 1$$

$$y_s = q - \frac{p_2}{4} = 2 - \frac{(-2)^2}{4} = 2 - 1 = 1$$

$$\Rightarrow S_2(1|1)$$

b) Zeichnung:



c) Koordinaten der Schnittpunkte:

Funktionen gleichsetzen:

$x^2 - 2x + 2 = -0{,}5x^2 + 4$

$x^2 + 0{,}5x^2 - 2x + 2 - 4 = 0$

$1{,}5x^2 - 2x - 2 = 0$ | große Lösungsformel (wegen 1,5)!

$$x_{1/2} = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1{,}5 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1{,}5} = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{3} = \frac{2 \pm 4}{3}$$

Schnittpunkt A: $x_1 = \frac{2+4}{3} = 2$ und $y_1 = 2^2 - 2 \cdot 2 + 2 = 2$, also: A(2|2)

Schnittpunkt B: $x_2 = \frac{2-4}{3} = -\frac{2}{3} \approx -0{,}7$ und $y_2 = (-0{,}7)^2 - 2 \cdot (-0{,}7) + 2 = 3{,}9$, also: B(-0,7|3,9)

d) Gleichung der Geraden durch A und B:

z.B. mit der 2-Punkteform der Formelsammlung:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow \frac{y-2}{x-2} = \frac{3{,}9-2}{-0{,}7-2} \Rightarrow \frac{y-2}{x-2} = \frac{1{,}9}{-2{,}7} \Rightarrow \frac{y-2}{x-2} = -0{,}7 \Rightarrow y - 2 = -0{,}7x + 1{,}4$$

$\Rightarrow \underline{y = -0{,}7x + 3{,}4}$

e) Länge von $\overline{AB}$: $\overline{AB}^2 = (2+0{,}7)^2 + (3{,}9-2)^2 \Rightarrow \underline{\overline{AB}} = \sqrt{2{,}7^2 + 1{,}9^2} = \underline{3{,}3\ \text{LE}}$