

Aufgabe 2:

Annette legt zu Beginn eines Jahres 2 000,00 € auf ihrem Sparbuch an. Der Zinssatz beträgt 3,5%. Zinsen werden mitverzinst.

Nach 2 Jahren und 7 Monaten hebt sie ihr gesamtes Geld einschließlich der Zinsen ab. Um wie viel Prozent ist ihr Guthaben insgesamt angestiegen?

Der Zusatz „Zinsen werden mitverzinst“ ist sehr wichtig, denn dadurch handelt es sich um eine Zinseszinsaufgabe. Dafür gilt die Grundformel:

$$K_n = K_0 \cdot q^n$$

Dabei ist K_0 das Grundkapital, K_n das Kapital nach n Jahren, q der Zinsfaktor und n die Anzahl der Jahre.

Der Zinsfaktor q beträgt hier: $q = 1 + \frac{p}{100} = 1 + \frac{3,5}{100} = 1,035$

Diese Zinseszins Formel gilt aber nur für die ersten beiden Jahre. Die Zinsen für die 7 Monate müssen wir extra berechnen.

Kapital nach 2 Jahren: $K_2 = 2000 \cdot 1,035^2 = 2\,142,45 \text{ €}$

Zinsen für 2 Jahre: $Z_2 = 2142,45 - 2000 = 142,50 \text{ €}$

Zinsen für 7 Monate: $Z_7 = \frac{K_2 \cdot p \cdot m}{100 \cdot 12} = \frac{2142,45 \cdot 3,5 \cdot 7}{100 \cdot 12} = 43,74 \text{ €}$

Gesamtzinsen: $Z = Z_2 + Z_7 = 142,50 + 43,74 = 186,24 \text{ €}$

Mit der einfachen Zinsformel $Z = \frac{K \cdot p}{100}$ können wir nun den gesamten Prozentsatz ausrechnen:

$$186,24 = \frac{2000 \cdot p}{100} \Rightarrow p = \frac{186,24 \cdot 100}{2000} = \underline{9,31\%} \quad (\text{bei der Bank werden Prozentangaben meist zweistellig angegeben})$$

Es geht auch mit dem Prozentfaktor:

$$E = G \cdot q \Rightarrow q = \frac{E}{G} = \frac{2000 + 186,24}{2000} = \frac{2186,24}{2000} = 1,0931 \Rightarrow p = \underline{9,31\%}$$

Ergebnis: Ihr Guthaben ist insgesamt um 9,31 Prozent angestiegen.

Aufgabe 3:

Frau Pfaff zahlt zu Anfang des Jahres 3 500,00 € bei der Bank ein, in jedem folgenden Jahr 250 € mehr als im Vorjahr. Über welches Guthaben verfügt sie nach Ablauf von 3 Jahren bei einem Zinssatz von 4,5%? Wie hoch müsste Frau Pfaff eine gleichbleibende Rate wählen, wenn sie bei gleichem Zinssatz dasselbe Endkapital erhalten wollte?

Es handelt sich hier um eine besondere Form des Ratensparvertrags, da die Rate jedes Jahr um 250 € steigt. Dafür gibt es keine speziellen Formeln, wir müssen also jedes Jahr einzeln angehen:

Anfang 1. Jahr:	$K_0 = 3500,00 \text{ €}$
Ende 1. Jahr:	$K_1 = 3500 \cdot 1,045 = 3657,50 \text{ €}$
Anfang 2. Jahr:	$K_0 = 3657,50 + 250 = 3907,50 \text{ €}$
Ende 2. Jahr:	$K_2 = 3907,50 \cdot 1,045 = 4083,34 \text{ €}$
Anfang 3. Jahr:	$K_0 = 4083,34 + 500 = 4583,34 \text{ €}$
Ende 3. Jahr:	$K_3 = 4583,34 \cdot 1,045 = 4789,59 \text{ €}$

Ergebnis: Nach drei Jahren kann sie über 4789,59 € verfügen.

Zur Beantwortung der zweiten Frage ersetzen wir in obiger Rechnung die sich ändernde Rate durch R und lösen die entstehende Gleichung nach R auf:

Anfang 2. Jahr:	$3657,50 + R$
Ende 2. Jahr:	$(3657,50 + R) \cdot 1,045 = 3657,50 \cdot 1,045 + R \cdot 1,045$
Anfang 3. Jahr:	$3657,50 \cdot 1,045 + R \cdot 1,045 + R$
Ende 3. Jahr:	$(3657,50 \cdot 1,045 + R \cdot 1,045 + R) \cdot 1,045$ $= 3657,50 \cdot 1,045^2 + R \cdot 1,045^2 + R \cdot 1,045$

Nach obiger Rechnung muss dabei 4789,59 € herauskommen:

$$3657,50 \cdot 1,045^2 + R \cdot 1,045^2 + R \cdot 1,045 = 4789,59$$

$$3994,08 + R \cdot (1,045^2 + 1,045) = 4789,59 \quad | -3994,08$$

$$R \cdot 2,137 = 795,51$$

$$\underline{\underline{R = \frac{795,51}{2,137} = 372,26 \text{ €}}}$$

Ergebnis: Die gleichbleibende Rate muss 372,26 € betragen.

Aufgabe 4:

Familie Müller will ein Auto zum Endpreis von 37 500 € kaufen. Für die Berechnung der zu erwartenden Folgekosten geht sie von folgenden Ausgaben pro Jahr aus:

Versicherung:	960,70 €
Steuer:	330,00 €
Wartung u. Reparaturen:	1,4 % des Endpreises
Benzinverbrauch:	8,5 l pro 100 km
Benzinpreis:	1,29 €
jährliche Fahrleistung:	15 000 km

Berechne die jährlichen Gesamtausgaben und daraus die Kosten pro gefahrenen Kilometer.
 Wie viel % dieser Gesamtausgaben entfallen auf die Benzinkosten?
 Familie Müller bezieht noch einen Wertverlust des Fahrzeugs von 7500 € im Jahr in die Berechnung mit ein. Wie hoch werden jetzt die Kosten für den gefahrenen Kilometer?

Jährliche Ausgaben:

Versicherung:		960,70 €
Steuer:		330,00 €
Wartung u. Reparaturen:	1,4 % von 37 500 = $37\,500 \cdot 0,014 =$	525,00 €
Benzinverbrauch:	8,5 l pro 100 km	
Benzinpreis:	1,29 €	$150 \cdot 8,5 \cdot 1,29 = 1644,75$ €
jährliche Fahrleistung:	15 000 km	
	Gesamtkosten:	<u>3 459,75 €</u>

$$\text{Kosten pro km: } \frac{3459,75}{15000} = 0,23 \text{ €}$$

Den Anteil der Benzinkosten berechnen wir mit der Prozentwertformel, da die Benzinkosten ja ein Anteil der Gesamtkosten sind:

$$P = \frac{G \cdot p}{100} \Rightarrow p = \frac{100 \cdot P}{G} = \frac{100 \cdot 1644,75}{3459,75} = 47,5\%$$

Gesamtkosten inklusiv Wertverlust: $3\,459,75 + 7\,500 = 10\,959,75$ €

Kosten pro km inklusiv Wertverlust: $\frac{10959,75}{15000} = 0,73$ €

Ergebnisse:

Die jährlichen Gesamtausgaben betragen 3 459,75 €. Pro km sind dies 0,23 €. Von den Gesamtausgaben entfallen 47,5% auf die Benzinkosten. Mit Wertverlust kostet der km pro Jahr 0,73€.

Aufgabe 5:

In einer Realschule sind 66% Deutsche, 22% Türken, 1/10 Griechen und 15 Schüler mit anderen Nationalitäten.

Wie viel Schüler hat die Schule insgesamt und wie viele davon sind türkischer und griechischer Abstammung?

Wie hoch ist der Ausländeranteil (in %) an dieser Schule?

Stelle diese Verteilung in einem Kreisdiagramm dar ($r=3,0$ cm)!

Bei dieser Aufgabe haben wir drei verschiedene Möglichkeiten der Darstellung von Anteilen: In Prozent (66% und 22%), als Bruch (1/10) und absolut (15).

Alles zusammen sind 100%, davon gehen 66%, 22% und $1/10 = 10\%$ ab:

$$100\% - 66\% - 22\% - 10\% = 2\%$$

Die 15 Schüler entsprechen also genau 2% der Gesamtschülerzahl. Um auf 100% hochzurechnen, machen wir einen Dreisatz, der auf eine Multiplikation mit 50 hinausläuft:

$$\text{Gesamtschülerzahl: } 15 \cdot 50 = 750 \text{ Schüler}$$

$$\text{davon sind 22\% Türken: } T = \frac{750 \cdot 22}{100} = \underline{165}$$

$$\text{und } 1/10 \text{ Griechen: } \frac{750}{10} = 75$$

Den Ausländeranteil erhalten wir, wenn wir von allen (=100%) die deutschen (=66%) abziehen: $100\% - 66\% = \underline{34\%}$

Für ein Kreisdiagramm müssen wir die 360° des Kreises in 100 Teile teilen = $3,6^\circ$. Ein Prozent entspricht also genau $3,6^\circ$.

$$66\% = 66 \cdot 3,6 = 237,6^\circ; \quad 22\% = 22 \cdot 3,6 = 79,2^\circ; \quad 10\% = 10 \cdot 3,6 = 36^\circ; \quad 2\% = 7,2^\circ$$

