

11.2 Ist die größte Zählerpotenz = größte Nennerpotenz, ist eine horizontale Gerade, parallel zur x-Achse, waagrechte Asymptote.

**Beispiel 1:**  $f(x) = \frac{4x^2 - 5}{2x^2 - 1}$ ;  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 - 5}{2x^2 - 1}$  mit höchster Potenz wieder kürzen:

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{4x^2}{x^2} - \frac{5}{x^2}}{\frac{2x^2}{x^2} - \frac{1}{x^2}} \rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 - \frac{5}{x^2}}{2 - \frac{1}{x^2}} \quad \text{für } x \rightarrow \infty \text{ einsetzen: } \rightarrow \frac{4-0}{2-0} \rightarrow 2 \quad \text{also } y=2.$$

**Beispiel 2:**  $f(x) = 4 + e^{\left(\frac{1}{3}\right)^x}$ ;  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(4 + e^{\left(\frac{1}{3}\right)^x}\right)$

lässt man jetzt  $x \rightarrow \infty$  streben, ergibt sich  $e^{\frac{1}{e^x}} = \frac{1}{e^x} \rightarrow 0$ , damit ergibt sich  $y=4$  als waagrechte Asymptote.

11.3 Ist die größte Zählerpotenz > größte Nennerpotenz, erhält man eine schiefe Asymptote, bzw. eine asymptotische Näherungsfunktion durch **Polynomdivision**.

(zur Rechentechnik der Polynomdivision siehe auch Besserwisser-Kasten im Themengebiet der Aufgabe 3 Gleichungen)

**Beispiel für „schiefe Asymptote“:**

$$f(x) = \frac{3x^2 - 2}{x + 3} \quad \text{Polynomdivision: } (3x^2 - 2) : (x + 3) = 3x - 9 + \text{Rest: } \frac{25}{x + 3}$$

Die Limes-Untersuchung erfolgt mit dem polynomdividierten Term:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(3x - 9 + \frac{25}{x + 3}\right) \quad \text{der Rest } \frac{25}{x + 3} \quad \text{geht immer } \rightarrow 0 \quad \text{für } x \rightarrow \infty.$$

Deshalb bleibt als schiefe Asymptote  $y = 3x - 9$  stehen.

**Beispiel für „asymptotische Näherungsfunktion“:**

$$f(x) = \frac{3x^3 - 2}{x + 3} \quad \text{Polynomdivision: } (3x^3 - 2) : (x + 3) = 3x^2 - 9x + 27 + \text{Rest: } \frac{83}{x + 3}$$

Die Limes-Untersuchung erfolgt mit dem polynomdividierten Term:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(3x^2 - 9x + 27 + \frac{83}{x + 3}\right) \quad \text{der Rest } \frac{83}{x + 3} \quad \text{geht immer } \rightarrow 0 \quad \text{für } x \rightarrow \infty.$$

Deshalb bleibt als asymptotische Näherungsfunktion eine Parabel:  $y = 3x^2 - 9x + 27$  stehen.

**Schlussfolgerung:** Größte Zählerpotenz - größte Nennerpotenz bestimmt, ob wir hier eine Gerade (schiefe Asymptote) oder parabelförmige Schaubilder (asymptotische Näherungsfunktionen) erhalten.

## 7.) Symmetrie

Ihr habt 2 verschiedene Symmetrien in der Schule kennengelernt:

- Achsensymmetrie zur y-Achse und
- Punktsymmetrie zum Ursprung

Generell gibt es auch die Achsensymmetrie zu beliebigen Achsen parallel zur y-Achse und die Punktsymmetrie zu beliebigen Punkten. Diese Überlegungen sind aber nicht abirelevant.

### 7.1 Achsensymmetrische Funktionen zur y-Achse („gerade“ Funktionen)

Bedingung:  $f(x) = f(-x)$

Beispiel:  $f(x) = 2x^4 - 5x^2 + 1$

Wie man leicht sieht, wird  $f(-x) = f(x)$ , da die geraden Potenzen das Minus-Vorzeichen neutralisieren → die Funktion ist also achsensymmetrisch zur y-Achse.

### 7.2 Punktsymmetrische Funktionen zum Ursprung („ungerade“ Funktionen)

Bedingung:  $f(x) = -f(-x)$

Beispiel:  $f(x) = -x^3 + 6x$  für  $x$  wird  $(-x)$  eingesetzt:

$$f(-x) = -(-x)^3 + 6(-x) \rightarrow f(-x) = x^3 - 6x \rightarrow -f(-x) = -(x^3 - 6x) = -x^3 + 6x$$

Also ist  $f(x) = -f(-x)$  und damit ist die Funktion punktsymmetrisch.

### 7.3 Beurteilung zusammengesetzter Funktionen

$f(x) = h(x) \cdot g(x)$   $f$  ist gerade, wenn  $h$  und  $g$  gerade oder beide ungerade sind und ist ungerade, wenn eine von beiden ( $h$  oder  $g$ ) gerade und die andere ungerade ist.

$f(x) = \frac{h(x)}{g(x)}$   $f$  ist gerade, wenn beide ( $h$  und  $g$ ) gerade oder beide ungerade sind und ist ungerade, wenn eine gerade und die andere ungerade ist.

$f(x) = h(x) \pm g(x)$   $f$  ist gerade, wenn beide ( $h$  und  $g$ ) gerade sind und ist ungerade, wenn beide ungerade sind.

## 4.2 Tangente bzw. Normale in einem Kurvenpunkt B

Das Aufstellen einer Tangente oder Normale in einem Kurvenpunkt  $B$  zählt wohl zu den absoluten Grundlagen in der Oberstufe.

Allgemeine Form der Tangentengleichung  $t$  im Berührungspunkt  $B(x_B / f(x_B))$ :

$$t: y = f'(x_B) \cdot (x - x_B) + f(x_B)$$

Allgemeine Form der Normalengleichung  $n$  im Berührungspunkt  $B(x_B / f(x_B))$ :

$$n: y = -\frac{1}{f'(x_B)} \cdot (x - x_B) + f(x_B)$$

Alternativ kann man natürlich auch mit der allgemeinen Geradengleichung  $y = m \cdot x + c$  rechnen:

Dabei ist  $m_t = f'(x_B)$  für Tangenten und

$$m_n = -\frac{1}{f'(x_B)} \quad \text{für Normalen.}$$

$c$  wird mit Hilfe des Kurvenpunktes  $B(x_B / f(x_B))$  ermittelt, indem man diesen in die Geradengleichung  $y = m \cdot x + c$  einsetzt und nach  $c$  auflöst.

### Beispiel

Gegeben ist die Funktion:  $f(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{3}{4}$ .

Bestimmen Sie Gleichung der Tangente (Normale) im Kurvenpunkt  $B(2 / f(x_B))$ .

Lösungsweg:

1. Zuerst wird  $f(x_B)$  errechnet:  $f(2) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1 \quad \rightarrow B(2/1)$

2. Jetzt wird die Steigung der Tangente  $f'(x_B)$  bestimmt:

$$f'(x) = -2 \cdot x^{-3} = -\frac{2}{x^3} \quad \rightarrow f'(2) = -\frac{2}{8} = -\frac{1}{4}$$

### 3. Tangentengleichung im Kurvenpunkt B(2/1)

Die Zahlen für  $f'(2)$  und  $B(2/1)$  werden jetzt in die Tangentengleichung von oben eingesetzt:

$$t: y = -\frac{1}{4} \cdot (x - 2) + 1 \quad \text{ausmultipliziert: } t: y = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{2}$$

### Normalengleichung im Kurvenpunkt B(2/1)

Die Zahlen für  $f'(2)$  und  $B(2/1)$  werden jetzt in die Normalengleichung von oben eingesetzt:

$$n: y = -\frac{1}{-\frac{1}{4}} \cdot (x - 2) + 1 \quad \text{ausmultipliziert: } n: y = 4x - 7$$

### 4.3 Bestimmung ganzrationaler Funktionen

Dieses Kapitel der Schulmathematik liegt zeitlich für die meisten Abiturienten schon etwas länger zurück, da es der Lehrplan für die 10./11.Klasse vorsieht.

Ein Beispiel gibt Klarheit, um was es sich dabei handelt:

Bestimmen Sie eine ganzrationale Funktion 3.Grades, deren Graph durch den Punkt  $P(1/8)$  geht und eine Wendetangente mit Steigung 6 im Wendepunkt  $W(0/0)$  besitzt.

Lösungsweg:

Ansatz für ganzrationale Funktion 3.Grades:  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$f''(x) = 6ax + 2b$$

(es ist sinnvoll sofort die 1. und 2. Ableitung zu bilden, da diese fast immer gebraucht werden und die Bildung wenig Zeit in Anspruch nimmt).

Man muss also 4 Gleichungen aus den Angaben des Textes filtern, da wir 4 Unbekannte (a,b,c,d) suchen.

Bedingungen aus dem Text in Gleichungs-Kurzform:

1. Punkt  $P(1/8)$ :  $f(1) = 8$  eingesetzt:  $8 = a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + c \cdot 1 + d$
- 2.+3. Wendepunkt  $W(0/0)$ :  $f(0) = 0$  eingesetzt:  $0 = a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d$   
 $f'(0) = 0$  eingesetzt:  $0 = 6a \cdot 0 + 2b$
4. Wendetangente:  $f''(0) = 6$  eingesetzt:  $6 = 3a \cdot 0^2 + 2b \cdot 0 + c$

Zuerst schaut man sich immer die Gleichungen mit der „0“ an. Also Gleichung 2 und 3:

Gleichung 2:  $0 = d$

Gleichung 3:  $0 = b$

Danach die Gleichungen, die zumindest noch eine „0“ besitzen: Also Gleichung 4:

Gleichung 4:  $6 = c$

Zuletzt werden die ermittelten Werte in die verbliebene Gleichung eingesetzt:

Gleichung 1:  $8 = a + b + c + d$   
mit  $d = b = 0$  und  $c = 6$ :  $8 = a + 6 \rightarrow a = 2$ .

Damit erhalten wir also die Funktion:  $f(x) = 2x^3 + 6x$ .