MATHRIX

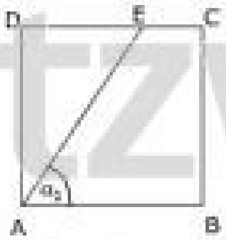
Aufgaben

Aufgabe 1:

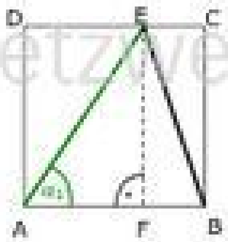
Das Viereck ABCD ist ein Quadrat. Es gilt:

$\overline{AE} = 8{,}0$ cm
$\alpha_1 = 57{,}0°$

Berechne die Länge von $\overline{BE}$.



Um ein rechtwinkliges Dreieck zu bekommen, fällen wir das Lot von E auf $\overline{AB}$.



Dabei ist: $\overline{EF} = \overline{BC} = \overline{AB}$ (Quadrat!!)

Δ AFE:

$\sin\alpha_1 = \frac{\overline{EF}}{\overline{AE}} \Rightarrow \overline{EF} = 8{,}0 \cdot \sin 57° = 6{,}7\,\text{cm} = \overline{AB}$

$\cos\alpha_1 = \frac{\overline{AF}}{\overline{AE}} \Rightarrow \overline{AF} = 8{,}0 \cdot \cos 57° = 4{,}4\,\text{cm}$

Δ BFE:

$\overline{BF} = \overline{AB} - \overline{AF} = 6{,}7 - 4{,}4 = 2{,}3\,\text{cm}$

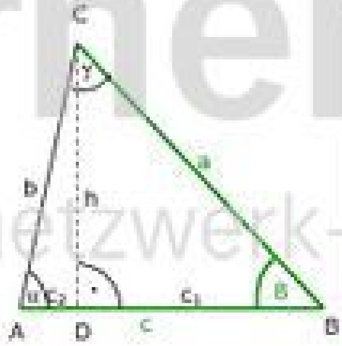
$\overline{EB}^2 = \overline{BF}^2 + \overline{EF}^2 \Rightarrow \underline{\overline{EB} = \sqrt{2{,}3^2 + 6{,}7^2} = 7{,}1\text{ cm}}$

Aufgabe 2:

Von einem Dreieck ist gegeben:

$\overline{BC}$ = a = 6,4 cm
$\overline{AB}$ = c = 8,9 cm
β = 56,3°

Berechne $\overline{AC}$ = b und alle anderen Winkel.



Wenn es in der Aufgabe nicht ausdrücklich steht, ist es kein rechtwinkliges Dreieck!

Wir müssen also erst eines „konstruieren" indem wir die Höhe h (genau genommen ist es die Höhe h_c !) eintragen. (Die Höhe h_a würde übrigens auch zum Ziel führen!)

ΔBDC:

$\sin\beta = \frac{h}{a} \Rightarrow h = a \cdot \sin\beta = 6{,}4 \cdot \sin 56{,}3° = 5{,}3\ \text{cm}$

$\cos\beta = \frac{c_1}{a} \Rightarrow c_1 = a \cdot \cos\beta = 6{,}4 \cdot \cos 56{,}3° = 3{,}6\ \text{cm}$

ΔADC:

$c_2 = c - c_1 = 8{,}9 - 3{,}6 = 5{,}3\ \text{cm}$

Mit h und c_2 haben wir von diesem rechtwinkligen Dreieck nun zwei Seiten (die Katheten) gegeben, können also mit dem Satz des Pythagoras die Seite b ausrechnen:

$b^2 = c_2^2 + h^2 \Rightarrow \underline{b} = \sqrt{5{,}3^2 + 5{,}3^2} = \underline{7{,}5\ \text{cm}}$

$\tan\alpha = \frac{h}{c_2} = \frac{5{,}3}{5{,}3} \Rightarrow \underline{\alpha = 45°}$

ΔABC:

$\underline{\gamma} = 180° - (\alpha + \beta) = 180° - (45° + 56{,}3°) = \underline{78{,}7°}$

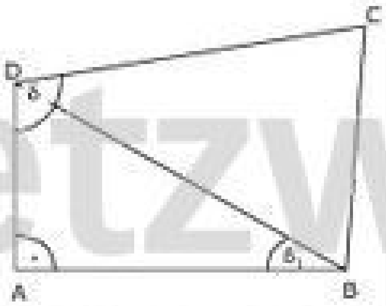
MATHRIX

Aufgabe 3:

Gegeben das Viereck ABCD mit:

A_{ABCD} = 39,8 cm² (Fläche des Vierecks)
$\overline{AB}$ = 6,3 cm
β_1 = 38,5°
δ = 118,5°

Berechne den Umfang des Trapezes.



Das Δ ABD ist rechtwinklig. Da man zwei Stücke kennt ($\overline{AB}$ und β_1), kann man das ganze Dreieck, einschließlich der Fläche, berechnen!
Wenn wir diese Fläche von der Gesamtfläche abziehen, erhalten wir die Fläche des Dreiecks BCD.
Über diese können wir, wenn $\overline{BD}$ bekannt ist, die Höhe h ausrechnen, im ΔDEC dann $\overline{CD}$ und $\overline{DE}$. Damit ist dann $\overline{BE}$ kein Problem und somit auch $\overline{BC}$ und der Umfang.

1.) Δ ABD:

$\tan\beta_1 = \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} \Rightarrow \overline{AD} = 6{,}3 \cdot \tan 38{,}5° = 5{,}0\,\text{cm}$

$A_{BAD} = \frac{\overline{AB}\cdot\overline{AD}}{2} = \frac{6{,}3\cdot 5{,}0}{2} = 15{,}8\ \text{cm}^2$

$\delta_1 = 90° - \beta_1 = 90° - 38{,}5° = 51{,}5°$

$\cos\beta_1 = \frac{\overline{AB}}{\overline{BD}} \Rightarrow \overline{BD} = \frac{6{,}3}{\cos 38{,}5°} = 8{,}1\,\text{cm}$

2.) ΔBCD:

$\delta_2 = \delta - \delta_1 = 118{,}5° - 51{,}5° = 67°$

$A_{BCD} = A_{ABCD} - A_{BAD} = 39{,}8 - 15{,}8 = 24{,}0\ \text{cm}^2$

$A_{BCD} = \frac{\overline{BD}\cdot h}{2} \Rightarrow h = \frac{2\cdot A_{BCD}}{\overline{BD}} = \frac{2\cdot 24}{8{,}1} = 5{,}9\,\text{cm}$

3.) ΔDEC:

$\sin\delta_2 = \frac{h}{\overline{CD}} \Rightarrow \overline{CD} = \frac{5{,}9}{\sin 67°} = 6{,}4\,\text{cm}$

$\tan\delta_2 = \frac{h}{\overline{DE}} \Rightarrow \overline{DE} = \frac{5{,}9}{\tan 67°} = 2{,}5\,\text{cm}$

4.) ΔBEC:

$\overline{BE} = \overline{BD} - \overline{DE} = 8{,}1 - 2{,}5 = 5{,}6\,\text{cm}$

$\overline{BC} = \sqrt{\overline{BE}^2 + h^2} = \sqrt{5{,}6^2 + 5{,}9^2} = 8{,}1\,\text{cm}$

<u>Viereck ABCD:</u>

Umfang u = 6,3 + 8,1 + 6,4 + 5,0

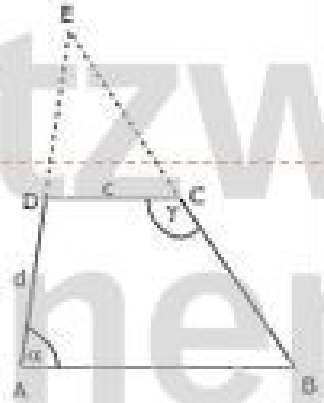
<u>u = 20,8 cm</u>

MATHRIX

Aufgabe 4:

In einem Trapez ABCD ist gegeben:

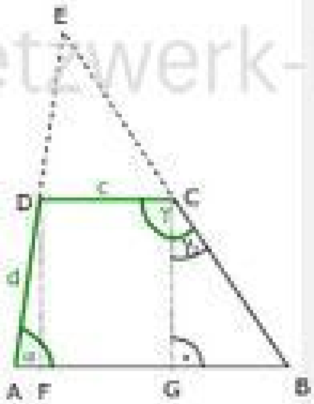
$\overline{CD} = c = 4{,}8$ cm
$\overline{AD} = d = 3{,}3$ cm
$\alpha = 61°$
$\gamma = 146°$



Berechne die Fläche des Trapezes.
Verlängert man die beiden Schenkel des Trapezes bis zum gemeinsamen Schnittpunkt E nach oben, so entsteht ein Dreieck ABE. Berechne die Länge der Dreiecksseite $\overline{AE}$!

Kommentar [HB1]:
Kommentar [HB2]:

Ein häufig gangbarer Weg bei der Berechnung von Trapezen, ist das Einzeichnen der Trapezhöhe, weil damit rechtwinklige Dreiecke entstehen.
Für die Fläche des Trapezes brauchen wir genau diese Höhe und die Grundseite des Trapezes, die sich aus $\overline{AF}, \overline{FG} = \overline{CD} = c$ und $\overline{BG}$ zusammensetzt.



Δ AFD:

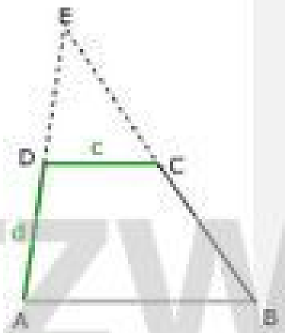
$$\sin\alpha = \frac{\overline{DF}}{d} \Rightarrow \overline{DF} = 3{,}3 \cdot \sin 61° = 2{,}9 \text{ cm} = \overline{CG}$$

$$\cos\alpha = \frac{\overline{AF}}{d} \Rightarrow \overline{AF} = 3{,}3 \cdot \cos 61° = 1{,}6 \text{ cm}$$

Δ BGC:

$$\gamma_1 = \gamma - 90° = 146° - 90° = 56°$$

$$\tan\gamma_1 = \frac{\overline{BG}}{\overline{CG}} \Rightarrow \overline{BG} = \overline{CG} \cdot \tan\gamma_1 = 2{,}9 \cdot \tan 56° = 4{,}3 \text{cm}$$



Trapez ABCD:

$$\overline{AB} = \overline{AF} + c + \overline{BG} = 1{,}6 + 4{,}8 + 4{,}3 = 10{,}7 \text{cm}$$

$$\underline{A_{ABCD}} = \frac{\overline{AB} + \overline{CD}}{2} \cdot \overline{DF} = \frac{10{,}7 + 4{,}8}{2} \cdot 2{,}9 \underline{= 22{,}5 \text{cm}^2}$$

Zur Berechnung der gesuchten Dreiecksseite brauchen wir den zweiten Strahlensatz:

$$\frac{\overline{ED}}{\overline{ED} + d} = \frac{c}{\overline{AB}} \Rightarrow \frac{\overline{ED}}{\overline{ED} + 3{,}3} = \frac{4{,}8}{10{,}7} \Rightarrow 10{,}7 \cdot \overline{ED} = 4{,}8 \cdot (\overline{ED} + 3{,}3) \Rightarrow 10{,}7 \cdot \overline{ED} = 4{,}8 \cdot \overline{ED} + 15{,}8$$

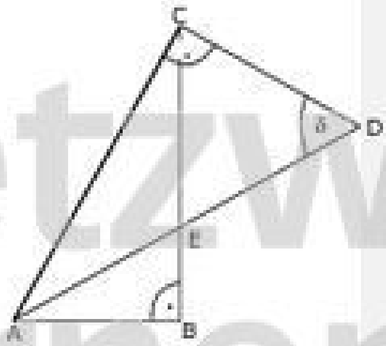
$$10{,}7 \cdot \overline{ED} - 4{,}8 \cdot \overline{ED} = 15{,}8 \Rightarrow 5{,}9 \cdot \overline{ED} = 15{,}8 \Rightarrow \overline{ED} = 2{,}7 \text{cm} \Rightarrow \underline{\overline{AE}} = \overline{AD} + \overline{ED} = 3{,}3 + 2{,}7 = \underline{6{,}0 \text{ cm}}$$

Aufgabe 5:

In den rechtwinkligen Dreiecken ABC und ADC sind gegeben:

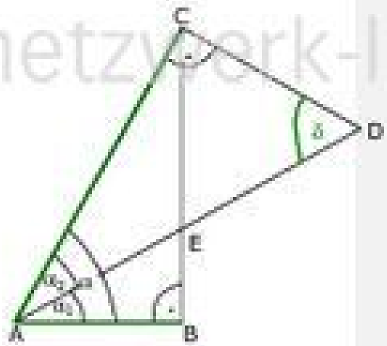
$\overline{AB} = 3{,}5$ cm
$\overline{AC} = 6{,}4$ cm
$\delta = 68{,}0°$

Berechne die Länge $\overline{DE}$.



In den Dreiecken ADC und ABC sind zwei jeweils zwei Stücke bekannt. Sie können also komplett berechnet werden.

Für die gesuchte Strecke brauchen wir $\overline{AD}$ und $\overline{AE}$. $\overline{AE}$ bekommen wir aus dem Δ ABE, wenn wir dort den Winkel vorher den Winkel α_1 berechnen.



Δ ADC:

$$\sin\delta = \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} \Rightarrow \overline{AD} = \frac{\overline{AC}}{\sin\delta} = \frac{6{,}4}{\sin 68°} = 6{,}9 \text{ cm}$$

$\alpha_2 = 90° - \delta = 90° - 68° = 22°$

Δ ABC:

$$\cos\alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{3{,}5}{6{,}4} \Rightarrow \alpha = 56{,}8°$$

Δ ABE:

$\alpha_1 = \alpha - \alpha_2 = 56{,}8° - 22° = 34{,}8°$

$$\cos\alpha_1 = \frac{\overline{AB}}{\overline{AE}} \Rightarrow \overline{AE} = \frac{\overline{AB}}{\cos\alpha_1} = \frac{3{,}5}{\cos 34{,}8°} = 4{,}3 \text{ cm}$$

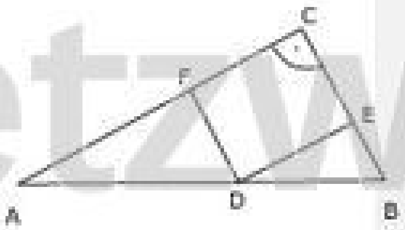
Δ EDC:

$\overline{DE} = \overline{AD} - \overline{AE} = 6{,}9 - 4{,}3 = \underline{2{,}6 \text{ cm}}$

Aufgabe 6:

Von einem rechtwinkligen Dreieck sind gegeben:

$\overline{BC} = 5{,}2$ cm
$\overline{AC} = 8{,}3$ cm
$\overline{AD} = 4{,}4$ cm



Die Punkte DECF bilden ein Rechteck. Berechne dessen Flächeninhalt!

Für die Fläche des Rechtecks brauchen wir die Strecken $\overline{DF}$ und $\overline{DE}$. Für $\overline{DF}$ brauchen wir den Winkel α. Dieser taucht als Winkel BDE wieder auf (Stufenwinkel). $\overline{DB}$ erhalten wir als Differenz von $\overline{AB}$ und $\overline{AD}$.

∆ ABC:

$$\tan\alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{5{,}2}{8{,}3} \Rightarrow \alpha = 32{,}1°$$

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 \Rightarrow \overline{AB} = \sqrt{8{,}3^2 + 5{,}2^2} = 9.8 \text{ cm}$$

∆ ADF:

$$\sin\alpha = \frac{\overline{DF}}{\overline{AD}} \Rightarrow \overline{DF} = 4{,}4 \cdot \sin 32{,}1° = 2{,}3 \text{ cm}$$

∆ DBE:

$$\overline{DB} = \overline{AB} - \overline{AD} = 9{,}8 - 4{,}4 = 5{,}4 \text{ cm}$$

$$\cos\alpha = \frac{\overline{DE}}{\overline{DB}} \Rightarrow \overline{DE} = 5{,}4 \cdot \cos 32{,}1° = 4{,}6 \text{ cm}$$

Rechteck DECF:

$$\underline{A_{DECF}} = \overline{DF} \cdot \overline{DE} = 2{,}3 \cdot 4{,}6 = \underline{10{,}6 \text{ cm}^2}$$

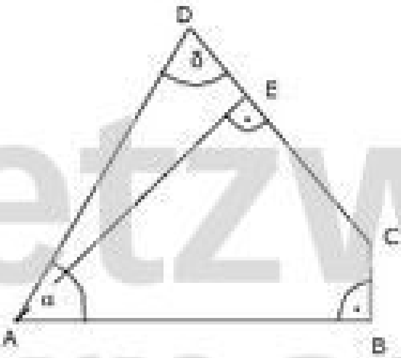
MATHRIX

Aufgabe 7:

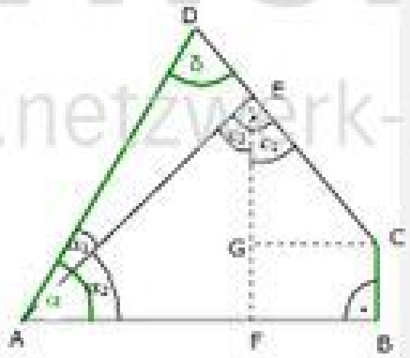
Vom Viereck ABCD sind gegeben:

$\overline{BC} = 1{,}2$ cm
$\overline{AD} = 6{,}5$ cm
$\alpha = 61{,}0°$
$\delta = 73{,}0°$

Berechne die Länge von $\overline{CE}$!



Die Bearbeitung dieser Aufgabe elordert einigen Umweg, wobei es verschiedene Möglichkeiten gibt. Es hat aber keinen Sinn, A mit C zu verbinden, da wir in dem Dreieck ABC nur sehr schwierig zu einem zweiten Bestimmungsstück kommen. Den Winkel α und den rechten Winkel bei E aufzu-Teilen ist erfolgreicher!



Δ AED:

$\alpha_1 = 90° - \delta = 90° - 73° = 17°$

$\sin\delta = \frac{\overline{AE}}{\overline{AD}} \Rightarrow \overline{AE} = 6{,}5 \cdot \sin 73° = 6{,}2$ cm

Δ AFE:

$\alpha_2 = \alpha - \alpha_1 = 61° - 17° = 44°$

$\varepsilon_2 = 90° - \alpha_2 = 90° - 44° = 46°$

$\sin\alpha_2 = \frac{\overline{EF}}{\overline{AE}} \Rightarrow \overline{EF} = 6{,}2 \cdot \sin 44° = 4{,}3$ cm

Δ CGE:

$\varepsilon_1 = 90° - \varepsilon_2 = 90° - 46° = 44°$

$\overline{EG} = \overline{EF} - \overline{GF} = 4{,}3 - 1{,}2 = 3{,}1$ cm

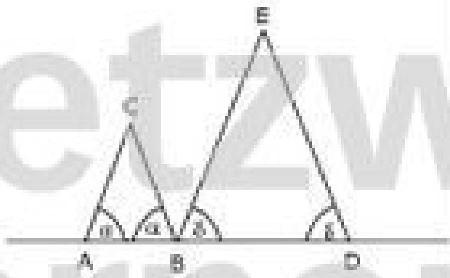
$\cos\varepsilon_1 = \frac{\overline{EG}}{\overline{EC}} \Rightarrow \underline{\overline{EC}} = \frac{\overline{EG}}{\cos\varepsilon_1} = \frac{3{,}1}{\cos 44°} = \underline{4{,}3 \text{ cm}}$

Aufgabe 8:

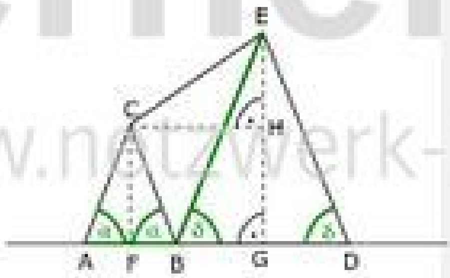
Auf der Geraden AD liegen die Dreiecke ABC und BDE. Es gilt:

$\overline{AB} = 5{,}4$ cm
$\overline{BE} = 10{,}3$ cm
$\alpha = 48{,}0°$
$\delta = 74{,}0°$

Berechne die Länge von $\overline{CE}$.



Da in beiden Dreiecken die Basiswinkel jeweils gleich sind, handelt es sich um gleichschenklige Dreiecke. Die Höhe teilt sie jeweils in zwei gleiche rechtwinklige Dreiecke.
Um die gesuchte Strecke berechnen zu können, brauchen wir ein rechtwinkliges Dreieck; dies erhalten wir mit der Parallelen CH zu AD.



Δ AFC:

$$\overline{AF} = \frac{\overline{AB}}{2} = 2{,}7\text{ cm} = \overline{FB}$$

$$\tan\alpha = \frac{\overline{CF}}{\overline{AF}} \Rightarrow \overline{CF} = 2{,}7 \cdot \tan 48° = 3{,}0\,\text{cm}$$

Δ BGE:

$$\sin\delta = \frac{\overline{EG}}{\overline{BE}} \Rightarrow \overline{EG} = 10{,}3 \cdot \sin 74° = 9{,}9\,\text{cm}$$

$$\cos\delta = \frac{\overline{BG}}{\overline{BE}} \Rightarrow \overline{BG} = 10{,}3 \cdot \cos 74° = 2{,}8\,\text{cm}$$

Δ CHE:

$$\overline{CH} = \overline{FB} + \overline{BG} = 2{,}7 + 2{,}8 = 5{,}5\,\text{cm}$$

$$\overline{EH} = \overline{EG} - \overline{CF} = 9{,}9 - 3{,}0 = 6{,}9\,\text{cm}$$

$$\overline{CE}^2 = \overline{CH}^2 + \overline{EH}^2 \Rightarrow \underline{\underline{\overline{CE}}} = \sqrt{5{,}5^2 + 6{,}9^2} = \underline{\underline{8{,}8\text{ cm}}}$$